

## استفاده از تئوری گراف در وارون‌سازی سه‌بعدی داده‌های گرانی‌سنجی برای تعیین پیکربندی توده‌های زیرسطحی همگن

سوسن سودمند نیری<sup>۱</sup>، وحید ابراهیم‌زاده اردستانی<sup>۲\*</sup> و سعید وطن‌خواه<sup>۳</sup>

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

۲. استاد، گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

۳. استادیار، گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

(دریافت: ۹۷/۴/۴، پذیرش نهایی: ۹۷/۱۰/۱۱)

### چکیده

در این مقاله وارون‌سازی سه‌بعدی داده‌های گرانی‌سنجی براساس تئوری گراف مورد استفاده قرار گرفته است. توده همگن زیرسطحی با استفاده از مجموعه‌ای از جرم‌های نقطه‌ای یکسان مدل می‌شود. با تطبیق این مجموعه جرم‌های نقطه‌ای با یک گراف کامل و با استفاده از الگوریتم کروسکال، درخت فراگیر کمینه (minimum spanning tree) برای این گراف محاسبه شده و سپس یک تابع پایدارکننده تحت عنوان تابع هم‌فاصله به‌دست می‌آید. این تابع علاوه بر پایدارکردن مسأله وارون، سبب می‌شود که در مدل حاصل فواصل میان جرم‌های نقطه‌ای تقریباً یکسان باشد. بنابراین توزیع فضایی مناسب برای جرم‌های نقطه‌ای، الگوریتم را به سمت حصول پیکربندی نزدیک به شکل توده اصلی سوق می‌دهد. تابع هدف کلی در این مسأله، ترکیب یافته از تابع هم‌فاصله و عدم انطباق داده، غیرخطی است و کمینه‌سازی آن با استفاده از الگوریتم ژنتیک انجام می‌شود. دو نمونه مدل مصنوعی متفاوت برای بررسی الگوریتم ارائه شده مورد استفاده قرار گرفته است. خروجی الگوریتم برای هر دو مدل، پیکربندی صحیح را نشان می‌دهد. برای تخمین و صحت‌سنجی پارامتر منظم‌سازی در این الگوریتم، راه‌کاری مؤثر توسط نویسندگان ارائه شده است. این شیوه وابسته به روند همگرایی تابع هم‌فاصله و برازش داده حاصل از مدل با داده مشاهده‌ای است. کاربرد با اجرای الگوریتم برای تعداد کمی پارامتر مختلف و بررسی این شرایط به سمت انتخاب پارامتر بهینه هدایت می‌شود. در پایان، داده گرانی توده سولفیدی موبرون در کانادا به‌عنوان یک نمونه داده واقعی مورد استفاده قرار گرفته است. گسترش این توده در راستای شرق ۳۵۰ متر و در عمق حداکثر ۲۰۰ متر برآورد می‌شود.

واژه‌های کلیدی: گرانی‌سنجی، وارون‌سازی، گراف، درخت فراگیر کمینه، الگوریتم ژنتیک، موبرون.

### ۱. مقدمه

و اولدنبرگ، ۱۹۹۸؛ بولانژه و چوتو، ۲۰۰۱؛ پورتیا‌گوین و زادانسف، ۱۹۹۹؛ وطن‌خواه و همکاران، ۲۰۱۷). این روش توانایی خوبی برای بازسازی توده‌های زیرسطحی دارد و غالباً در اکتشاف توده‌های معدنی مورد استفاده بوده است. در سوی دیگر، الگوریتم‌های غیرخطی در وارون‌سازی گرانی معمولاً به‌دنبال یافتن سطوح انفصال مانند مرز موهو و عمق پی‌سنگ (basement) می‌باشند. محاسبه عمق پی‌سنگ در حوضه‌های رسوبی برای اکتشافات هیدروکربنی مورد اهمیت است. مقطع حوضه رسوبی با یک سری منشورهای کنار هم چیده شده تقریب زده می‌شود. پهنای این منشورها یکسان است و چگالی آنها می‌تواند ثابت باشد و یا آن‌که با عمق افزایش یابد.

وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی همواره به‌عنوان روشی جذاب و کارا برای ارائه مدلی از توده زیرسطحی مطرح بوده است. داده برداشت شده بر روی سطح زمین در یک الگوریتم خودکار وارد شده، هندسه و تباین چگالی چشمه تولیدکننده این داده مورد جستجو قرار می‌گیرد. بر مبنای پارامتر مورد جستجو، الگوریتم‌های وارون‌سازی به دو دسته کلی خطی (linear) و غیر خطی (non-linear) تقسیم می‌شوند. در وارون‌سازی خطی سطح زیرین در ناحیه برداشت داده توسط تعداد زیادی مکعب مدل‌سازی می‌شود. هندسه این مکعب‌ها ثابت و معلوم در نظر گرفته می‌شود و وارون‌سازی به‌دنبال یافتن مقادیر مجهول تباین چگالی برای هر مکعب است (لاست و کوییک، ۱۹۸۳؛ لی

به هر حال این چگالی‌ها معلوم در نظر گرفته شده و الگوریتم وارون‌سازی در این حالت به دنبال یافتن ضخامت منشورها، عمق پی‌سنگ، است (بوت، ۱۹۶۰؛ بلکلی، ۱۹۹۵؛ چاکراواری و سانداراجان، ۲۰۰۷). باید این نکته را در نظر گرفت که غیرخطی بودن تابع هدف در این مسائل مشکل مهمی در حل آنها است. در مقاله حاضر وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی براساس شیوه‌ای نوین که توسط بیجانی و همکاران (۲۰۱۵) معرفی شده است، مورد نظر است. این شیوه در هیچ یک از دو دسته‌ای که توضیح داده شد قرار نمی‌گیرد و بنابراین آن را می‌توان به عنوان روشی ابتکاری از سوی نویسندگان فوق دانست. در این شیوه توده همگن زیر سطحی با استفاده از مجموعه‌ای از جرم‌های نقطه‌ای (mass points) یکسان مدل می‌شود، بنابراین خروجی این الگوریتم صرفاً پیکربندی (skeleton) توده زیرسطحی را نمایان می‌سازد. در ادامه در مورد این شیوه توضیح داده خواهد شد.

بر اساس تئوری گاوس، مسائل وارون گرانی‌سنجی ذاتاً نایکتا هستند. تعداد زیادی مدل زیرسطحی با چگالی و هندسه متفاوت می‌توان یافت که داده یکسانی بر روی سطح تولید کنند. از سوی دیگر داده‌ی برداشت‌شده همواره آمیخته به نوبه است. بنابراین برای به دست آوردن جوابی که از لحاظ زمین‌شناسی مناسب و هم‌زمان دارای حساسیت کمی نسبت به نوبه باشد، باید از فرآیند منظم‌سازی (regularization) جواب استفاده کرد. منظم‌سازی در واقع اضافه کردن قیود مناسب برای حل مسئله وارون است. این قیود می‌تواند براساس اطلاعات جانبی موجود وارد مسئله شوند و یا آن که صرفاً یک سری توابع ریاضی خاص باشند که فضای جستجوی مدل را به سوی فضای مورد نظر مفسر سوق دهند. از نمونه‌های چنین قیودی در وارون‌سازی خطی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: استفاده از قید فشردگی (لاست و کویک، ۱۹۸۳؛ بولانژه و چوتو، ۲۰۰۱) و منظم‌کننده‌های تُرم صفر و یک (پورتیاگوین و ژادانف، ۱۹۹۹؛ وطن‌خواه و همکاران، ۲۰۱۵؛ وطن‌خواه و همکاران، ۲۰۱۷) به منظور

بازسازی مدل‌هایی با مرزهای گسسته، استفاده از تابع وزن‌دهی عمقی (لی و اولدنبرگ، ۱۹۹۸) به منظور خنثی کردن کاهش حساسیت کرنل با عمق و استفاده از مشتق مرتبه اول و دوم (لی و اولدنبرگ، ۱۹۹۸) برای هموار نگه‌داشتن تغییرات چگالی توده زیرسطحی. در وارون‌سازی غیرخطی استفاده از تباین چگالی متغیر با عمق (چاکراواری و سانداراجان، ۲۰۰۷) و استفاده از قید تغییرات کلی (total variation) برای بازسازی پی‌سنگ را می‌توان نام برد (مارتینز و همکاران، ۲۰۱۱). در شیوه ارائه شده توسط بیجانی و همکاران (۲۰۱۵)، مجموعه جرم‌های نقطه‌ای به عنوان رئوس یک گراف در نظر گرفته می‌شود. سپس یک تابع پایدار کننده براساس تئوری درخت فراگیر کمینه (minimum spanning tree) به دست می‌آید. این تابع، که تابع هم‌فاصله (equidistance function) نامیده می‌شود، علاوه بر پایدار کردن مسئله وارون، سبب می‌شود که در مدل حاصل فواصل میان جرم‌های نقطه‌ای تقریباً یکسان باشد. بنابراین الگوریتم به سمت حصول پیکربندی صحیح برای توده زیرسطحی سوق داده می‌شود. باید توجه داشت که تابع هدف کلی در این الگوریتم، تابعی غیرخطی ترکیب یافته از تابع عدم انطباق داده (data misfit) و تابع هم‌فاصله است. جوابی که این تابع هدف کلی را کمینه کند به عنوان مدل حاصل از وارون‌سازی در نظر گرفته می‌شود.

همان‌طور که بیان شد در مسائل غیرخطی یافتن جوابی که تابع هدف را کمینه کند، دشوار است. در بسیاری موارد، الگوریتم‌های قطعی (deterministic algorithms) بهینه‌سازی همانند الگوریتم مارکوارت-لونبرگ و گوس-نیوتن برای حل این گونه مسائل به کار رفته‌اند (زین و پو، ۱۹۹۳). این تکنیک‌ها اصطلاحاً کمینه محلی (local minimum) را استخراج می‌کنند و قادر به تمایز بین کمینه محلی و کمینه فراگیر (global minimum) نیستند، بلکه صرفاً یافتن یک کمینه را پایان کار خود می‌دانند. در مسائل غیرخطی که چندین کمینه محلی در کنار کمینه فراگیر وجود دارند، این احتمال است که

استفاده از الگوریتم ژنتیک مورد بحث قرار خواهد گرفت و مراحل انجام وارون‌سازی در جدولی بیان خواهد شد. الگوریتم معرفی شده بر روی دو نمونه مدل مصنوعی اجرا شده و نتایج حاصل نشان داده می‌شود. در پایان یک نمونه داده گرانی واقعی مربوط به منطقه موبرون در کانادا برای وارون‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

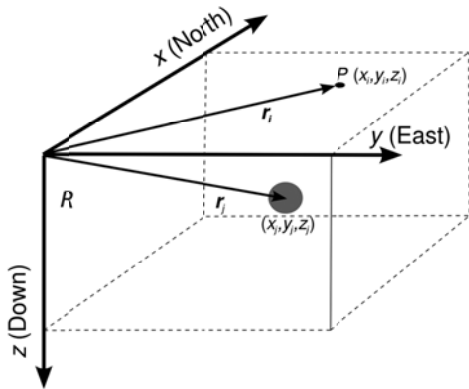
## ۲. تئوری روش

### ۲-۱. مسأله پیشرو

ناحیه مورد بررسی (ناحیه R) را در یک سیستم مختصات کارترین در نظر بگیرید (شکل ۱). جرم نقطه‌ای درون این ناحیه و در مختصات  $(x_j, y_j, z_j)$  قرار دارد. جهت محور Z به سمت پایین در نظر گرفته شده است. مؤلفه قائم گرانی،  $g_z$ ، ناشی از این جرم نقطه‌ای در محل نقطه مشاهده‌ای P با مختصات  $(x_i, y_i, z_i)$  بر اساس قانون گرانش نیوتن به صورت زیر است (بلکلی، ۱۹۹۵):

$$g_z(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = -\gamma \frac{m_p (z_i - z_j)}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3} \quad (1)$$

در این رابطه  $\gamma$  ثابت جهانی جاذبه،  $m_p$  جرم مربوط به جرم نقطه‌ای،  $\mathbf{r}_i$  بردار موقعیت نقطه مشاهده‌ای نسبت به مبدأ مختصات،  $\mathbf{r}_j$  بردار مکان جرم نقطه‌ای،  $z_i$  و  $z_j$  مؤلفه‌های قائم بردارهای  $\mathbf{r}_i$  و  $\mathbf{r}_j$  هستند.



شکل ۱. ناحیه R و جرم نقطه‌ای درون این ناحیه. بردارهای  $\mathbf{r}_i$  و  $\mathbf{r}_j$  به ترتیب موقعیت نقطه مشاهده‌ای (نقطه P) و موقعیت جرم نقطه‌ای نسبت به مبدأ مختصات را نمایش می‌دهند. شکل اقتباس شده از بیجانی و همکاران (۲۰۱۵).

الگوریتم در کمینه محلی به دام بیافتد. بنابراین واضح است که چنین الگوریتم‌هایی تا چه حد به مدل اولیه انتخابی وابسته هستند، برای مدل‌های اولیه متفاوت ممکن است کمینه‌های متفاوتی به دست آید. علاوه بر آن به دلیل آن که در طول فرآیند تکرار الگوریتم، نیاز به محاسبه مشتق‌های تابع هدف نسبت به پارامترهای مدل وجود دارد، پیچیدگی اجرای الگوریتم و زمان مورد نیاز برای محاسبات می‌تواند مشکل‌زا باشد. در مقابل می‌توان روش‌های بهینه‌سازی سراسری براساس جستجوی تصادفی کنترل شده را به کار گرفت (مونتانا، ۱۹۹۴). این روش‌ها، که به عنوان روش‌های جستجوی کاشف ( heuristic method) نیز شناخته می‌شوند، از شبیه‌سازی فرآیندهای طبیعی استفاده می‌کنند. از نمونه‌های چنین الگوریتم‌هایی می‌توان تبرید شبیه‌سازی شده (simulated annealing)، ژنتیک (genetic) و کلونی مورچگان (ant colony) را نام برد. در این مقاله برای کمینه‌سازی تابع هدف غیرخطی از الگوریتم ژنتیک استفاده شده است. این روش از یک جمعیت تصادفی شروع کرده و به طور تکرار مجموعه تخمین‌ها را بهبود می‌دهد. این بهبود با شبیه‌سازی رفتار تکاملی سیستم‌های بیولوژیکی انجام می‌پذیرد و تا زمانی که یک نتیجه قابل قبول حاصل شود، ادامه می‌یابد (گولدربرگ و هولند، ۱۹۸۸). از نکات مثبت استفاده از چنین الگوریتمی آن است که نیازی به اطلاعات در مورد انحنا تابع هدف و نیز وارون کردن یک ماتریس نیست و همان‌طور که گفته شد غالباً به دنبال یافتن کمینه فراگیر هستند (بیجانی و همکاران، ۲۰۱۵). در مقابل زمان محاسبات زیاد برای مسائل بزرگ مقیاس و دشوار بودن ادغام تابع پایدار کننده در تابع هدف، از مشکلات این الگوریتم است. مقالات متعددی از کاربرد این روش‌ها در وارون‌سازی داده‌های ژئوفیزیکی وجود دارد (بوسکتی و همکاران، ۱۹۹۵ و ۱۹۹۷).

در ادامه ابتدا تئوری روش مورد استفاده بیان خواهد شد. نحوه تولید تابع هم‌فاصله با استفاده از تئوری گراف توضیح داده می‌شود. سپس کمینه‌سازی تابع هدف با

به صورت زیر است (بیجانی و همکاران، ۲۰۱۵):

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} m_i \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (۴)$$

وارون سازی به دنبال آن است که یک  $\mathbf{q}$  مناسب تخمین زند به طوری که هم زمان داده حاصل از آن انطباق خوبی با داده مشاهده شده داشته باشد. این شرط با تابع عدم انطباق داده (data misfit) اعمال می شود:

$$\phi(\mathbf{q}) = \|\mathbf{g}_z^{obs} - \mathbf{g}_z(\mathbf{q})\|_2^2 \quad (۵)$$

که  $\|\cdot\|_2$  معرف نرم ۲ برای بردار است. همان طور که بیان شد  $\mathbf{g}_z(\mathbf{q})$  به داده حاصل از جرم های نقطه ای، محاسبه شده با رابطه (۲)، دلالت دارد.

در مقدمه بیان شد که به علت وجود نوفه در داده مشاهده ای، صرفاً کمینه کردن عبارت عدم انطباق داده  $\phi(\mathbf{q})$  به حصول جواب های ناپایدار منجر خواهد شد. بنابراین نیاز به منظم سازی جواب وجود دارد. برای این منظور تابع هدف کلی (objective function) به شکل زیر استفاده می شود (بیجانی و همکاران، ۲۰۱۵):

$$\Gamma(\mathbf{q}) = \phi(\mathbf{q}) + \lambda \theta(\mathbf{p}) \quad (۶)$$

در این رابطه  $\theta(\mathbf{p})$  عبارت پایدار کننده (stabilizer) و  $\lambda$  پارامتر منظم سازی (regularization parameter) نام دارد. این پارامتر تعادل بین دو عبارت  $\theta(\mathbf{p})$  و  $\phi(\mathbf{q})$  را فراهم می آورد و نقش بسیار مهمی در حصول جواب های با کیفیت دارد. بر آورد بهینه آن در هر الگوریتم وارون سازی از نکات کلیدی محسوب می شود. در ادامه در مورد روش تعیین این پارامتر توضیح داده خواهد شد. تابع پایدار کننده  $\theta(\mathbf{p})$  در این مقاله براساس شیوه ای جدید که توسط بیجانی و همکاران (۲۰۱۵) ارائه شده است، مورد استفاده قرار می گیرد. این نویسندگان براساس تئوری درخت فراگیر کمینه (MST) به ارائه پایدار کننده ای پرداختند که صرفاً وابسته به بردار  $\mathbf{p}$  است. آنها نام این تابع را تابع هم فاصله (equidistance function) نهادند. در بخش بعدی در مورد نحوه محاسبه

با فرض آن که  $M$  جرم نقطه ای در ناحیه  $R$  قرار داشته باشد و نیز داده در  $N$  نقطه بر روی سطح زمین مشاهده شود، با استفاده از اصل برهم نهی رابطه زیر برقرار است (بیجانی و همکاران، ۲۰۱۵):

$$\mathbf{g}_z = \sum_{j=1}^M \mathbf{g}_z(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), \quad i=1, \dots, N \quad (۲)$$

که بردار  $\mathbf{g}_z \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  شامل مؤلفه های قائم گرانی ناشی از مجموع جرم ها در نقاط مشاهده ای است. بنابراین بی هنجاری گرانی مجموعه ای از جرم های نقطه ای به آسانی و با استفاده از رابطه (۲) قابل محاسبه است. با داشتن مجموعه ای از چنین جرم های نقطه ای می توان استخوان بندی و جرم توده مسبب بی هنجاری گرانی را تخمین زد. در اینجا جرم چشمه هدف به مفهوم اضافه یا کم بودن جرم در ارتباط با ناحیه دربرگیرنده آن است.

## ۲-۲. مسأله وارون گرانی

فرض کنید که داده گرانی برداشت شده در سطح زمین در بردار  $\mathbf{g}_z^{obs} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  قرار گرفته باشد. همچنین فرض بر آن است که یک چشمه همگن تولید کننده این بی هنجاری است. مدلی که برای تفسیر به کار می رود شامل مجموعه ای از  $M$  جرم نقطه ای یکسان است که هر یک دارای جرم  $m_p$  هستند. این جرم های نقطه ای به صورت تصادفی در تمامی مکان های مجاز قرار گرفته اند. اگر برداری شامل مؤلفه های مختصاتی تمامی این جرم ها باشد که به صورت زیر مرتب شده اند (بیجانی و همکاران، ۲۰۱۵):

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} \quad (۳)$$

و اگر  $m_i$  جرم کل مجموعه جرم های نقطه ای باشد،  $m_i = M m_p$ ، آنگاه بردار پارامترهای  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{(3M+1) \times 1}$

داشته باشد، اصطلاحاً درخت فراگیر کمینه (MST) گویند. بنابراین بایستی یال‌هایی انتخاب شوند که کمینه مسیر را بدون ایجاد دور تشکیل دهند. برای این منظور می‌توان از الگوریتم کروسکال (Kruskal's algorithm) استفاده کرد (کروسکال، ۱۹۵۶). روش کار به این صورت است که ابتدا یال‌هایی که کمترین وزن را دارند شناسایی می‌شوند، شرط نبود دور بررسی شده و سپس نوبت به وزن بعدی می‌رسد. فرآیند به همین ترتیب ادامه یافته تا آن‌که درخت تشکیل شده همه‌ی رئوس گراف را شامل شود. شکل ۳ درخت فراگیر کمینه را برای گراف شکل ۲ نمایش می‌دهد. خروجی الگوریتم MST بردار  $\mathbf{d}^{MST}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{(M-1) \times 1}$  است که شامل وزن هر یال می‌باشد. بایست توجه داشت که حل مسأله درخت فراگیر کمینه به تنهایی کافی نیست، بلکه یال‌های درخت تشکیل شده باید فاصله یکسان داشته باشند. تابعی به نام تابع هم‌فاصله به صورت زیر تعریف می‌شود (بیجانی و همکاران، ۲۰۱۵):

$$\theta(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{M-1} [d_i^{MST}(\mathbf{p}) - \bar{d}_{MST}(\mathbf{p})]^2 \quad (۸)$$

در واقع این تابع مجموع اختلاف بین طول هر یال،  $d_i^{MST}$ ، با میانگین طول‌ها،  $\bar{d}_{MST}$ ، است که این اختلاف با توان ۲ محاسبه شده است. بنابراین تابع را می‌توان همانند تابع واریانس فاصله‌ها دانست. واریانس بیان می‌کند که هر فاصله چقدر با میانگین فاصله‌ها اختلاف دارد. بنابراین اگر  $\theta(\mathbf{p})$  صفر باشد، بیانگر آن است که همه یال‌ها دارای طول یکسانی هستند و در نتیجه تمام جرم‌های نقطه‌ای با فاصله یکسانی از هم جدا شده‌اند. به همین دلیل است که می‌توان انتظار داشت که اسکلت توده همگن زیر سطحی مدل‌سازی شود. در بخش مربوط به مدل‌های مصنوعی، تابع هم‌فاصله برای تکرارهای متوالی الگوریتم ژنتیک ترسیم می‌شود. نشان داده خواهد شد که چگونه این تابع می‌تواند کمک شایانی به انتخاب و صحت‌سنجی پارامتر منظم‌سازی کند.

این تابع با استفاده از نظریه گراف به تفصیل بحث خواهد شد.

## ۲-۳. تابع هم‌فاصله: تئوری گراف و مسأله درخت فراگیر کمینه

استراتژی جدیدی که برای ارائه عبارت  $\theta(\mathbf{p})$  توسط بیجانی و همکاران (۲۰۱۵) مورد استفاده قرار گرفت براساس مفاهیمی از تئوری گراف است. یک گراف مجموعه‌ای از نقاط، رأس (vertices)، است که توسط خطوطی، یال (edge)، به هم متصل شده است (دثو، ۱۹۷۴). گرافی که همه‌ی نقاط آن با هم توسط یال‌ها در ارتباط باشند را همبند گویند. گراف همبندی را که تعداد یال‌های آن یکی کمتر از تعداد رئوسش باشد، کامل نامند. عدد حقیقی نسبت داده شده به هر یال را وزن آن یال گویند. انطباق مفاهیم گراف برای مجموعه جرم‌های نقطه‌ای در مسأله حاضر به صورت زیر است:

۱. مجموعه  $M$  جرم نقطه‌ای به عنوان رئوس یک گراف کامل وزن‌دار در نظر گرفته می‌شود.

۲. خطوط متصل‌کننده رئوس به عنوان یال در نظر گرفته خواهند شد.

۳. وزن هر یال فاصله بین دو جرم نقطه‌ای است که توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$d_{ij}(\mathbf{p}) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (۷)$$

در این رابطه  $d_{ij}$  فاصله بین دو جرم نقطه‌ای  $i$  و  $j$  است. شکل ۲ طرحی از یک گراف کامل وزن‌دار دو بعدی را نشان می‌دهد. نحوه اتصال جرم‌های نقطه‌ای بایست به گونه‌ای باشد که هیچ‌گونه دوری (cycles) در گراف نباشد و همچنین کمترین مسیر بین رئوس انتخاب شود. چنین مسیری را می‌توان بر اساس مسأله درخت فراگیر کمینه (minimum spanning tree) به دست آورد. درخت، گراف همبندی است که دور نداشته باشد. درختی که کوتاه‌ترین مسیر را

فراوانی داشته است. این الگوریتم روش مناسبی برای یافتن کمینه فراگیر است و همان‌طور که در مقدمه بیان شد احتمال به دام افتادن آن در کمینه‌های محلی اندک است، فارغ از آن که مدل آغازین چه مدلی باشد. الگوریتم ژنتیک بر پایه دو اصل بنا شده است: بقای بهترین فرد و بهبود افراد جدید در طی فرآیند تولید مثل. پارامترهایی که در این الگوریتم به کار می‌روند به شرح زیر است:

۱. فرد (individual): یک تخمین محتمل از جواب نهایی را گویند (در الگوریتم حاضر یک برادر  $q$ ).

۲. جمعیت (population): مجموعه‌ای از افراد.

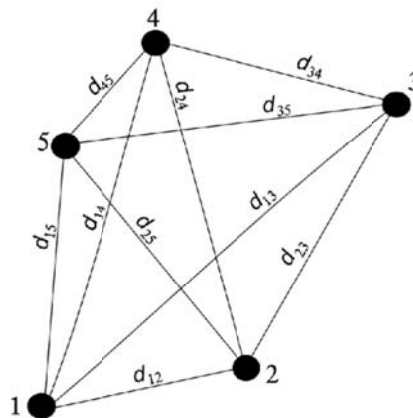
۳. جمعیت اولیه (initial population): جمعیتی که به‌طور تصادفی تولید شده است.

۴. حدود جستجو (search limits): فضای جستجو که توسط کاربر و با استفاده از اطلاعات اولیه تعیین می‌شود.

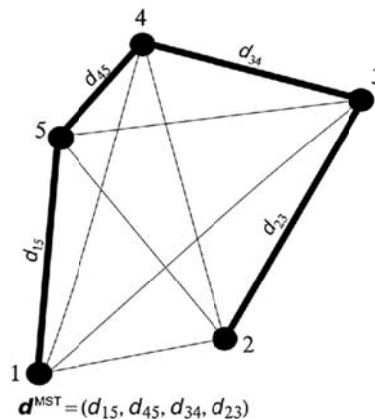
۵. نسل (generation): تعداد تکرار الگوریتم.

۶. برازش (fitness): مقدار تابع هدف را گویند (در الگوریتم حاضر معادله (۶)). در واقع معیاری برای سنجش شایستگی افراد است.

روند الگوریتم به این صورت است که ابتدا جمعیت اولیه - ای به‌طور تصادفی تولید می‌شود. این جمعیت اولیه بایستی بر اساس حدود جستجو انتخاب شود. پارامترهای مدل در طول تکرارهای الگوریتم در محدوده جستجو باقی خواهند ماند. این نکته مهمی است که در تمامی روش‌های وارون‌سازی، خطی و غیرخطی، مشابه آن وجود دارد. زیرگروه‌های ژنتیک مانند انتخاب، تولید مثل، جهش و پذیرش همواره این حدود جستجو را رعایت خواهند کرد. هر فردی از جمعیت اولیه بر اساس تابع هدفی که برای مسئله تعریف شده است، برازشی دارد. این برازش شایستگی هر یک از افراد به‌عنوان والد را نشان می‌دهد. برازش بهتر به مفهوم مقدار کمتر تابع هدف رابطه (۶) است. برخی افراد که برازش بهتری دارند به‌عنوان والد انتخاب می‌شوند. این والدین با یکدیگر ادغام شده و با استفاده از عمل تولید مثل (crossover) فرزندان تولید می‌شوند. بخش کوچکی از این جمعیت جدید نیز به



شکل ۲. طرحی از یک گراف کامل دوبعدی. نقاط مشکی که با اعداد ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده اند رئوس گراف و خطوط مشکی یا ل‌های آن هستند.  $d_{12}, d_{13}, \dots, d_{ij}$  فاصله بین دو جرم نقطه‌ای  $i$  و  $j$  می‌باشند. شکل اقتباس شده از بیجانی و همکاران (۲۰۱۵).



شکل ۳. مثالی از درخت فراگیر کمینه که با استفاده از الگوریتم کروسکال برای گراف شکل ۲ حاصل شده است. نقاط مشکی که با اعداد ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده اند جرم‌های نقطه‌ای در گراف وزن‌دار هستند. یال‌هایی که با مشکی پررنگ نشان داده شده‌اند، یال‌های انتخابی با استفاده از الگوریتم کروسکال برای شکل دهی درخت فراگیر کمینه می‌باشند. شکل اقتباس شده از بیجانی و همکاران (۲۰۱۵).

## ۴-۲. الگوریتم ژنتیک

استراتژی که برای کمینه کردن تابع هدف رابطه (۶) در نظر گرفته شده است، استفاده از الگوریتم ژنتیک می‌باشد. الگوریتم ژنتیک یک روش جستجوی تصادفی بر اساس سازوکار انتخاب‌های طبیعی و ژنتیک می‌باشد (گولدبرگ و هولند، ۱۹۸۸؛ مونتانا، ۱۹۹۴). الگوریتم ژنتیک در مسائل بهینه‌سازی در تمامی شاخه‌های علوم کاربرد

کردند. بررسی‌های ما نشان داد که منحنی ال، روش مناسبی برای تخمین پارامتر تنظیم در الگوریتم حاضر نیست. بر اساس اجراهای متعدد برنامه رایانه‌ای نوشته شده بر روی مدل‌های مصنوعی با مقادیر مختلف  $\lambda$ ، معیاری مناسب برای انتخاب و صحت‌سنجی این پارامتر در ادامه معرفی می‌شود.

### ۳. مدل مصنوعی

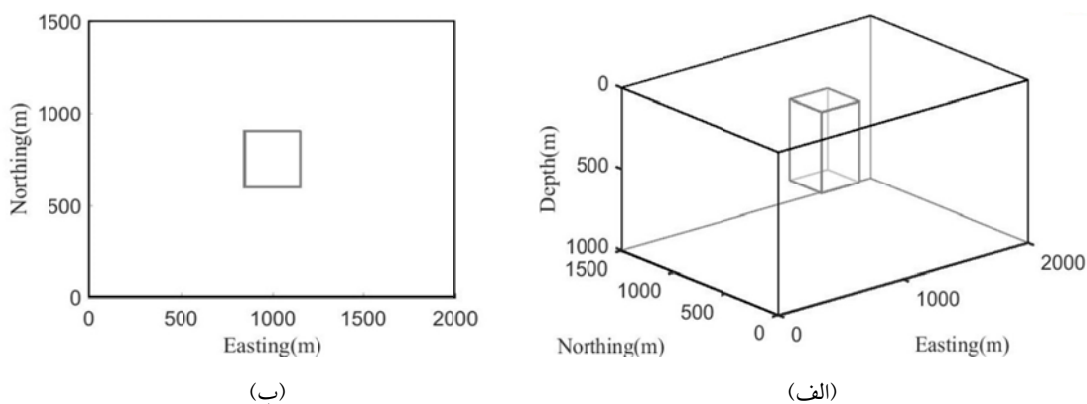
#### ۳-۱. دایک قائم

برای بررسی الگوریتم وارون‌سازی بیان شده در جدول ۱، در ابتدا مدلی به صورت دایک قائم تولید می‌شود (شکل ۴). این دایک دارای تباين چگالی  $1 \text{ gr/cm}^3$  با محیط دربرگیرنده‌اش است. دایک از عمق  $100 \text{ m}$  شروع و تا  $600 \text{ m}$  ادامه دارد. همچنین گسترش آن در دو جهت شرق و شمال برابر  $300 \text{ m}$  است. جرم کل برای این توده  $45 \times 10^9$  کیلوگرم است. داده‌ی حاصل از این مدل،  $\mathbf{d}^{\text{exact}}$ ، در شبکه‌ای منظم شامل  $1200 = 40 \times 30$  ایستگاه در سطح با فاصله‌ی ایستگاهی  $50 \text{ m}$  تولید می‌شود. نوفه گوسی با انحراف معیار  $(\mathbf{d}^{\text{exact}})_i + 0.001 \|\mathbf{d}^{\text{exact}}\|_2$  به هر داده اضافه شده است. شکل ۵ داده‌ی حاصل از این دایک و آمیخته به نوفه را نشان می‌دهد.

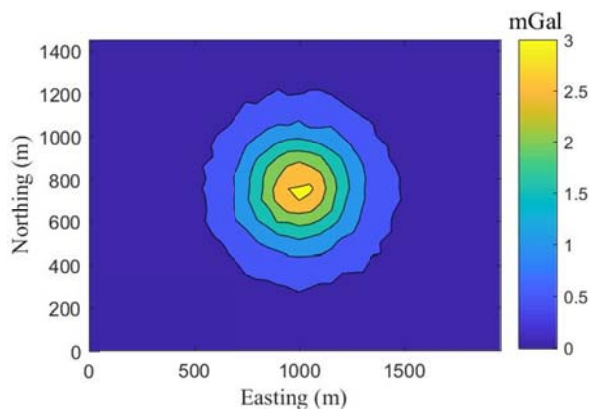
دلخواه جهش (mutation) داده می‌شوند. فرآیند جهش به منظور جلوگیری از قرار گرفتن تمام راه حل‌های ممکن و موجود در یک جمعیت در مجموعه جواب‌های کمینه محلی می‌باشد. به بیان دیگر هدف از جهش آن است که با اعمال تغییرات ناگهانی بر فرزندان، از افتادن مسئله درون کمینه محلی جلوگیری شود. سپس جمعیت جدید بررسی شده و فقط آنهایی که برآزش بهتری دارند، انتخاب می‌شوند. این فرآیند تکرار می‌شود تا زمانی که معیار توقف الگوریتم برآورده شود. در مقاله حاضر این معیار تعداد نسل‌ها است که توسط کاربر در ابتدا تعیین می‌شود. بهترین فرد در تمامی نسل‌ها، آن که کمترین مقدار تابع هدف رابطه (۶) را دارد، به عنوان جواب نهایی انتخاب می‌شود. به منظور درک بهتر الگوریتم وارون‌سازی ارائه شده در این مقاله برای خوانندگان، مراحل اجرای این الگوریتم در جدول شماره ۱ با جزئیات آورده شده است. تنها نکته‌ی باقی‌مانده بیان شیوه‌ای برای برآورد مناسب پارامتر تنظیم  $\lambda$  است. هر چند شیوه‌های متعددی برای انتخاب این پارامتر در وارون‌سازی خطی و غیرخطی وجود دارد، اما غالب آنها قابلیت کاربرد در الگوریتم ارائه شده را ندارد. بیجانی و همکاران (۲۰۱۵) از روش منحنی ال (L-curve) برای تعیین این پارامتر استفاده

جدول ۱. مراحل انجام وارون‌سازی گرانی با استفاده از تئوری گراف و الگوریتم ژنتیک.

ورودی‌ها: $\mathbf{g}_z^{\text{obs}}, M, \lambda, X_{j_{\min}}, X_{j_{\max}}, Y_{j_{\min}}, Y_{j_{\max}}, Z_{j_{\min}}, Z_{j_{\max}}, m_{\min}, m_{\max}$ ، اندازه جمعیت، تعداد نسل‌ها
مرحله ۱. جمعیت اولیه شامل تعدادی $\mathbf{q}$ (به تعداد پارامتر "اندازه جمعیت") به طور تصادفی تولید می‌شود. این $\mathbf{q}$ ها بایستی در محدوده مورد جستجو که توسط کاربر تعیین شده است، انتخاب گردند.
مرحله ۲. گراف مربوط به هر یک از $\mathbf{q}$ ها ایجاد شود. سپس الگوریتم کروسکال (تابع در ابزارهای متلب موجود است) به کار رفته و درخت فراگیر کمینه مربوط به آن $\mathbf{q}$ محاسبه شود. $\mathbf{d}_i^{\text{MST}}$ و $\bar{\mathbf{d}}_{\text{MST}}$ خروجی این مرحله است.
مرحله ۳. محاسبه تابع هم‌فاصله $\theta(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{M-1} [\mathbf{d}_i^{\text{MST}}(\mathbf{p}) - \bar{\mathbf{d}}_{\text{MST}}(\mathbf{p})]^2$ برای هر $\mathbf{q}$ .
مرحله ۴. بردار $\mathbf{g}_z(\mathbf{q})$ برای هر $\mathbf{q}$ محاسبه شود، سپس عبارت عدم انطباق داده $\phi(\mathbf{q}) = \ \mathbf{g}_z^{\text{obs}} - \mathbf{g}_z(\mathbf{q})\ _2^2$ برای آن $\mathbf{q}$ به دست آید.
مرحله ۵. محاسبه $\Gamma(\mathbf{q}) = \phi(\mathbf{q}) + \lambda \theta(\mathbf{p})$
مرحله ۶. معیار توقف (رسیدن به پارامتر "تعداد نسل‌ها") بررسی شود. در صورت برآورده شدن الگوریتم متوقف شود و بهترین تخمین (آن که تابع هدف مرحله ۵ را کمینه تر کرده است) به عنوان جواب ارائه شود، در غیر اینصورت الگوریتم به مرحله ۷ می‌رود.
مرحله ۷. یک جمعیت جدید ایجاد شود. در تولید این جمعیت بایست تمامی زیرگروه‌های انتخاب، تولید مثل، جهش و پذیرش انجام پذیرد. همچنین بایست توجه داشت که این $\mathbf{q}$ های جدید در محدوده مورد جستجو انتخاب گردند. سپس الگوریتم به مرحله ۲ می‌رود.
خروجی: $\mathbf{q}$ مربوط به تکرار آخر.



شکل ۴. مدل دایک قائم دارای تباین چگالی  $1 \text{ gr/cm}^3$  با محیط دربرگیرنده‌اش. الف) نمای سه‌بعدی؛ ب) نمای از بالا.



شکل ۵. داده حاصل از مدل شکل ۴ و آمیخته به نوفه.

مجاز برای مقدار جرم کلی نیز یک محدوده گسترده است. همان‌طور که گفته شد، به‌هرحال، این الگوریتم نیازمند ورود محدوده‌ای برای پارامترهای مدل است تا فقط در آن محدوده به دنبال این پارامترها بشود. این نکته در تمامی انواع الگوریتم‌های وارون‌سازی وجود دارد، و حصول جواب‌های مناسب همیشه به استفاده از اطلاعات اولیه مناسب نیازمند است.

جدول ۲. حدود جستجو برای مدل دایک قائم.

پارامتر	کمینه	بیشینه
$x_j (m)$	۵۰۰	۱۵۰۰
$y_j (m)$	۳۰۰	۱۳۰۰
$z_j (m)$	۲۰	۱۰۰۰
$m_i (kg)$	$۳۵ \times 10^9$	$۵۵ \times 10^9$

برای اجرای الگوریتم تعداد جرم‌های نقطه‌ای، اندازه جمعیت و تعداد نسل‌ها به ترتیب برابر ۲۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ در نظر گرفته می‌شود. هرچند این انتخاب‌ها براساس پیشنهاد بیجانی و همکاران (۲۰۱۵) است، اما بررسی‌های ما نیز دلالت بر چنین انتخابی دارد. به‌خصوص انتخاب تعداد جرم‌های نقطه‌ای بیشتر هیچ‌گونه بهبود خاصی در جواب حاصل نداشت، در حالی که زمان محاسبات بیشتری برای اجرای الگوریتم مورد نیاز بود. محدوده جستجو برای این مدل در جدول ۲ آورده شده است. حدود مجاز برای قرارگیری جرم‌های نقطه‌ای، در راستاهای شرق و شمال، به آسانی و با استفاده از شکل بی‌هنجاری گرانی قابل تخمین است. برای عمق شرط مورد استفاده خیلی محدود کننده نیست، در واقع اجازه داده شده است که جرم‌های نقطه‌ای از عمق ۲۰ تا ۱۰۰۰ متری قرار گیرند. محدوده

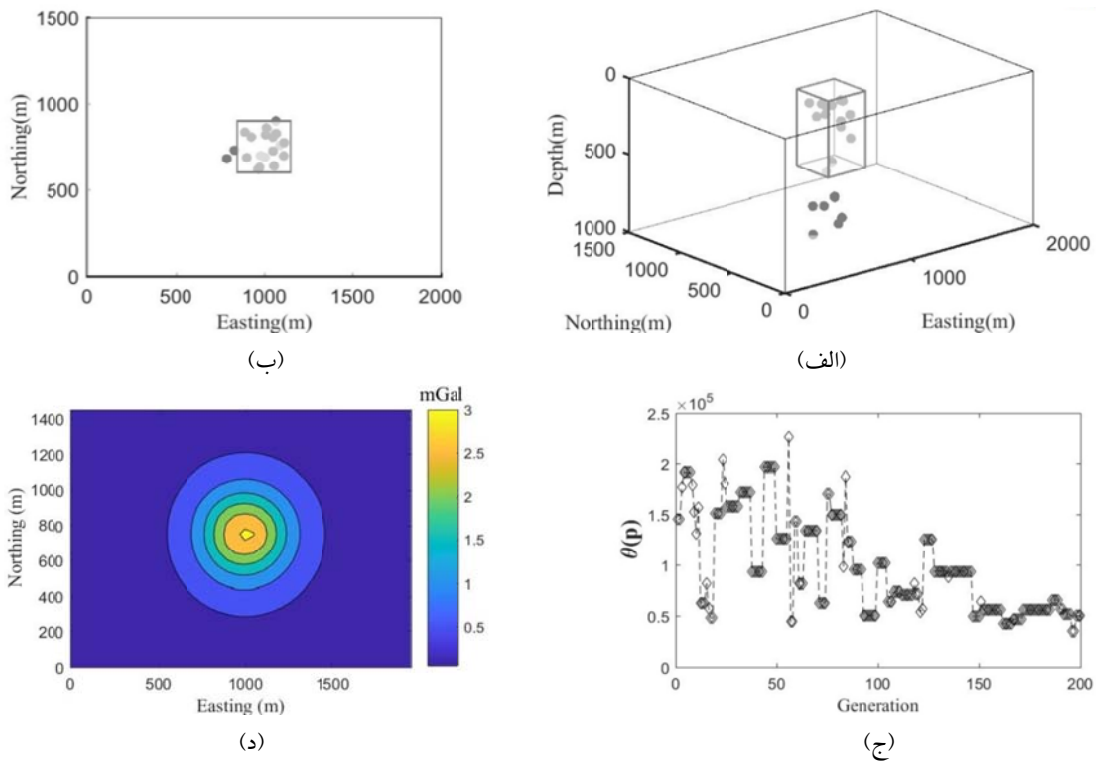


می‌باشد. کمینه تابع هدف برای این مدل ۳/۳۱۵۷ و زمان محاسبات ۱۵۳ ثانیه می‌باشد. شکل ۸ نتایج حاصل از اجرای الگوریتم با مقدار پارامتر  $\lambda = 1$  را نمایش می‌دهد. مدل بازسازی شده هیچ‌گونه انطباقی با مدل اصلی ندارد. پاسخ گرانی مدل با داده مشاهده‌ای تفاوت زیادی دارد، اما روند همگرایی منحنی  $\theta(\mathbf{p})$  پایدار است. مقدار جرم مجموع  $m_i$  برابر  $5 \times 10^9$  محاسبه شده است که با مقدار صحیح تفاوت دارد. کمینه تابع هدف برای این مدل ۴۹/۵۸۷۱ و زمان محاسبات ۱۵۷ ثانیه می‌باشد.

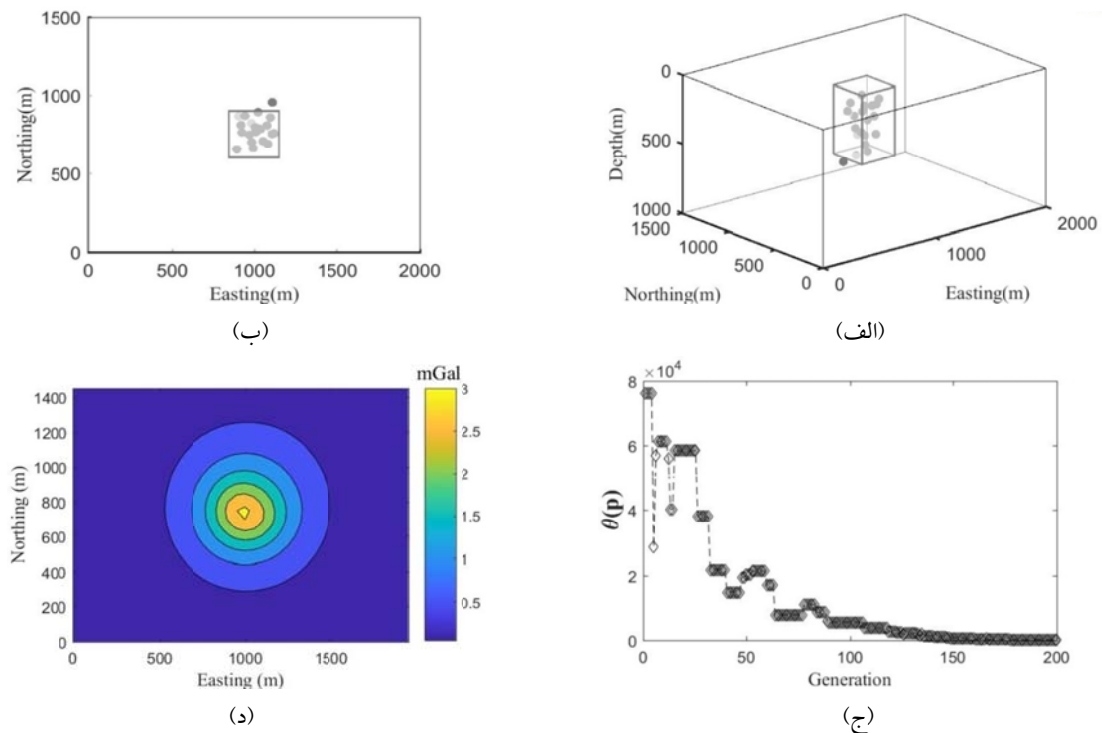
نتایج این بررسی‌ها دلالت بر آن دارد که هرگاه پارامتر منظم‌سازی مناسب انتخاب شده باشد، سه شرط زیر برقرار است:

۱. پاسخ گرانی مدل نزدیک به داده مشاهده شده است (برازش خوبی حاصل شده است).
۲. روند همگرایی منحنی  $\theta(\mathbf{p})$  پایدار بوده و مقدار  $\theta(\mathbf{p})$  به سمت صفر سوق می‌یابد.
۳. کمینه تابع هدف برای مدل ساخته شده کوچک است. با برقراری سه شرط فوق می‌توان انتظار داشت که پارامتر منظم‌سازی انتخاب شده، نزدیک به مقدار بهینه باشد. در چنین حالتی است که مدل به دست آمده استخوان‌بندی توده زیرسطحی را با دقت خوبی نمایش خواهد داد. کاربر می‌تواند به آسانی و با انتخاب تعدادی اندکی پارامتر، در محدوده‌ای شامل مقادیر بزرگ تا کوچک، الگوریتم وارون را برای هر یک از این مقادیر اجرا نماید. هر پارامتری که برای آن سه شرط فوق برقرار شد، پارامتر بهینه است و مدل ساخته شده برای آن به‌عنوان جواب در نظر گرفته شود. بنابراین الگوریتم نیازی به استفاده از روش منحنی‌ال، مورد استفاده توسط بیجانی و همکاران (۲۰۱۵)، برای تعیین پارامتر منظم‌سازی ندارد. منحنی‌ال روشی زمان‌بر است و زمان محاسبات را به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهد.

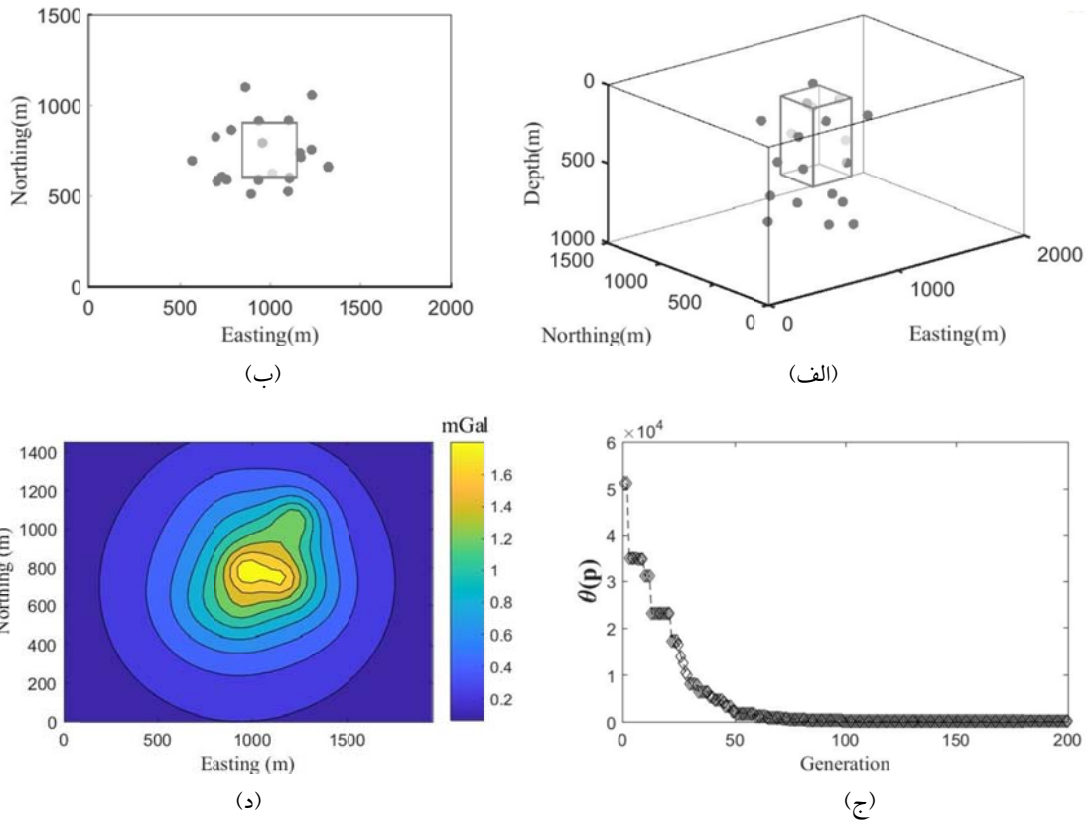
تعدادی پارامتر منظم‌سازی به دلخواه انتخاب شده و وارون‌سازی برای آنها انجام پذیرفته است. نتایج وارون‌سازی برای سه مقدار متفاوت  $\lambda$  در شکل‌های ۶، ۷ و ۸ نشان داده شده است. در این شکل‌ها علاوه بر مدل ساخته شده، تابع  $\theta(\mathbf{p})$  برای تکرارهای متوالی و نیز داده حاصل از مدل نمایش داده شده است. مقدار  $\theta(\mathbf{p})$  مربوط به بهترین فرد در هر تکرار الگوریتم ژنتیک است. همچنین به منظور آن که بتوان به آسانی مدل ساخته شده را با مدل اولیه مقایسه کرد، مدل اولیه نیز در این شکل‌ها ترسیم شده است. شکل ۶ نتایج حاصل از اجرای الگوریتم با مقدار پارامتر  $\lambda = 1 \times 10^{-9}$  را نشان می‌دهد. در این شکل تعدادی جرم نقطه‌ای در پایین مدل بازسازی شده وجود دارند که از مجموعه جرم‌های بالایی جدا شده‌اند. در این حالت مشخص است که عمق توده نادرست به دست آمده است، اما مرزهای افقی آن با تقریب بهتری بازسازی شده‌اند. پاسخ گرانی مدل انطباق خوبی با داده مشاهده‌ای دارد، اما روند همگرایی منحنی  $\theta(\mathbf{p})$  کاملاً ناپایدار است. مقدار جرم مجموع  $m_i$  برابر  $51 \times 10^9$  محاسبه شده است که هرچند در محدوده مجاز قرار دارد اما با مقدار صحیح متفاوت است. نکته دیگر آن که کمینه تابع هدف، رابطه (۶)، برای این مدل برابر ۱/۴۳۱۵ است. همچنین زمان انجام محاسبات توسط رایانه‌ای با پردازنده ۷ هسته‌ای با فرکانس ۳/۶ گیگا هرتز و حافظه اجرایی ۱۶ گیگابایت در حدود ۱۵۴ ثانیه است. در شکل ۷ نتایج حاصل از اجرای الگوریتم با مقدار پارامتر  $\lambda = 2 \times 10^{-3}$  نشان داده شده است. مشخص است که مدل بازسازی شده انطباق خوبی با دایک دارد، در واقع پیکربندی توده همگن زیر سطحی به خوبی نشان داده شده است. پاسخ گرانی مدل انطباق خوبی با داده مشاهده‌ای دارد، و منحنی  $\theta(\mathbf{p})$  به صورت پایدار به سمت صفر همگرا می‌شود. مقدار جرم مجموع  $m_i$  برابر  $10^9$   $49 \times$  محاسبه شده است که نزدیک به مقدار صحیح



شکل ۶. نتایج وارون‌سازی با استفاده از پارامتر منظم‌سازی  $\lambda = 1e-9$ . (الف) نمای سه‌بعدی از مدل ساخته‌شده؛ (ب) نمای از بالا؛ (ج) تابع هم‌فاصله  $\theta(\mathbf{p})$  برای تکرارهای متوالی الگوریتم ژنتیک؛ (د) داده گرانی حاصل از مدل.



شکل ۷. نتایج وارون‌سازی با استفاده از پارامتر منظم‌سازی  $\lambda = 2e-3$ . (الف) نمای سه‌بعدی از مدل ساخته‌شده؛ (ب) نمای از بالا؛ (ج) تابع هم‌فاصله  $\theta(\mathbf{p})$  برای تکرارهای متوالی الگوریتم ژنتیک؛ (د) داده گرانی حاصل از مدل.

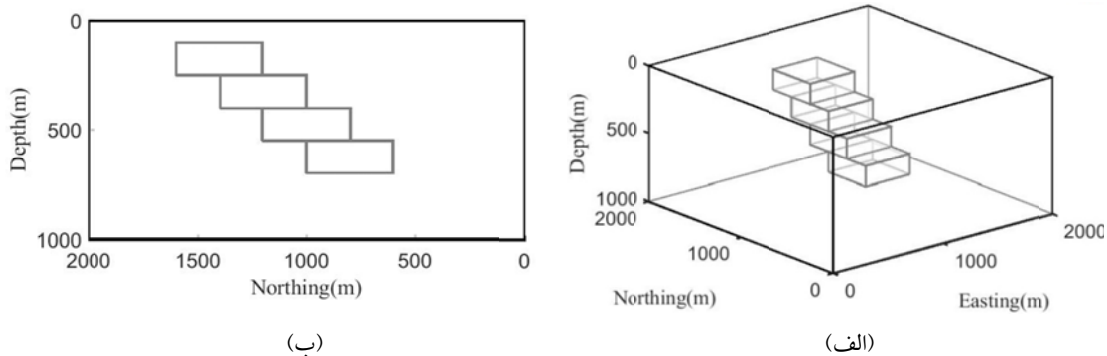


شکل ۸. نتایج وارون‌سازی با استفاده از پارامتر منظم‌سازی  $\lambda = 1$ . الف) نمای سه‌بعدی از مدل ساخته‌شده؛ ب) نمای از بالا؛ ج) تابع هم‌فاصله  $\theta(\mathbf{p})$  برای تکرارهای متوالی الگوریتم ژنتیک؛ د) داده گرانی حاصل از مدل.

۳-۲. دایک شیب‌دار

اکنون الگوریتم وارون‌سازی بر روی مدل پیچیده‌تری به کار می‌رود. این مدل دایکی شیب‌دار است که از عمق ۱۰۰m شروع شده و تا ۷۰۰ m ادامه دارد (شکل ۹). تباین چگالی دایک با محیط دربرگیرنده‌اش  $1 \text{ gr/cm}^3$  و جرم کل آن  $96 \times 10^9$  کیلوگرم است.

داده‌ی حاصل از این مدل در شبکه‌ای شامل  $1600 \times 40 = 64000$  ایستگاه در سطح با فاصله‌ی ایستگاهی ۵۰m تولید می‌شود. نوفه گوسی با انحراف‌معیار  $(0.02 \|\mathbf{d}^{\text{exact}}\|_2 + 0.001)$  به هر داده اضافه شده است. داده نوفه‌ای این مدل در شکل ۱۰ نمایش داده شده است.

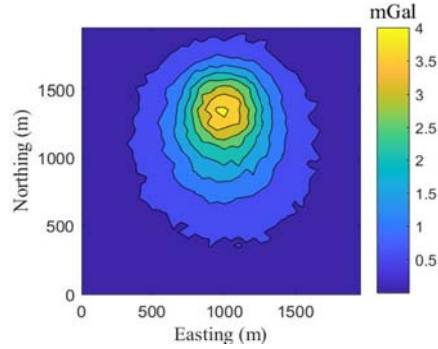


شکل ۹. مدل دایک شیب‌دار دارای تباین چگالی  $1 \text{ gr/cm}^3$  با محیط دربرگیرنده‌اش. الف) نمای سه‌بعدی؛ ب) نمای از مقابل.

$85 \times 10^9$  کیلوگرم می‌باشد و زمان مورد نیاز برای محاسبات در هر سه مورد در حدود ۲۴۰ ثانیه است. نتایج وارون‌سازی برای دایک شیب‌دار مشابهت زیادی با نتایج قبل دارند و بر صحت نتیجه‌گیری در مورد نحوه تعیین پارامتر بهینه دلالت می‌کنند. شیب و پیکره دایک برای پارامتر منظم‌سازی بهینه، شکل ۱۲، به خوبی نمایان شده است. بازسازی مناسب شیب توده زیرسطحی از ویژگی‌های جالب این الگوریتم است، که در تمامی مدل‌های مورد بررسی توسط نویسندگان این ویژگی وجود دارد.

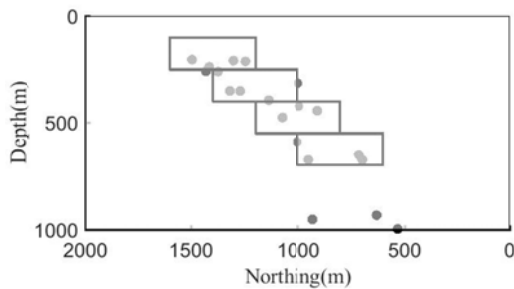
جدول ۳. حدود جستجو برای مدل دایک شیب‌دار.

پارامتر	کمینه	پیشینه
$x_j (m)$	۵۰۰	۱۵۰۰
$y_j (m)$	۵۰۰	۱۸۰۰
$z_j (m)$	۲۰	۱۰۰۰
$m_i (kg)$	$110 \times 10^9$	$80 \times 10^9$

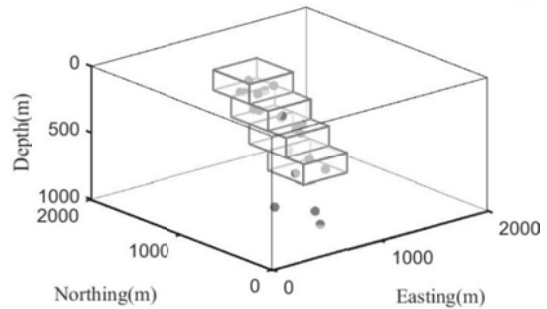


شکل ۱۰. داده حاصل از مدل شکل ۹ و آمیخته به نوفه.

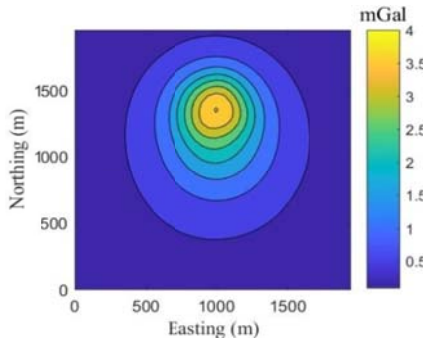
تعداد جرم‌های نقطه‌ای، اندازه جمعیت و تعداد نسل‌ها به ترتیب برابر ۲۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ در نظر گرفته می‌شود. همچنین محدوده جستجو برای این مدل در جدول ۳ آورده شده است. مشابه با حالت قبل، الگوریتم جدول ۱ برای سه مقدار مختلف پارامتر منظم‌سازی اجرا شده است. نتایج وارون‌سازی در شکل‌های ۱۱، ۱۲ و ۱۳ نشان داده شده است. کمینه تابع هدف برای این سه حالت به ترتیب  $6/1824$ ،  $7/5720$  و  $681/2907$  می‌باشد. همچنین جرم کل به دست آمده به ترتیب  $105 \times 10^9$ ،  $101 \times 10^9$  و



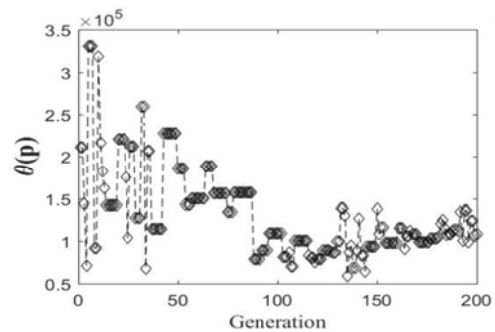
(ب)



(الف)

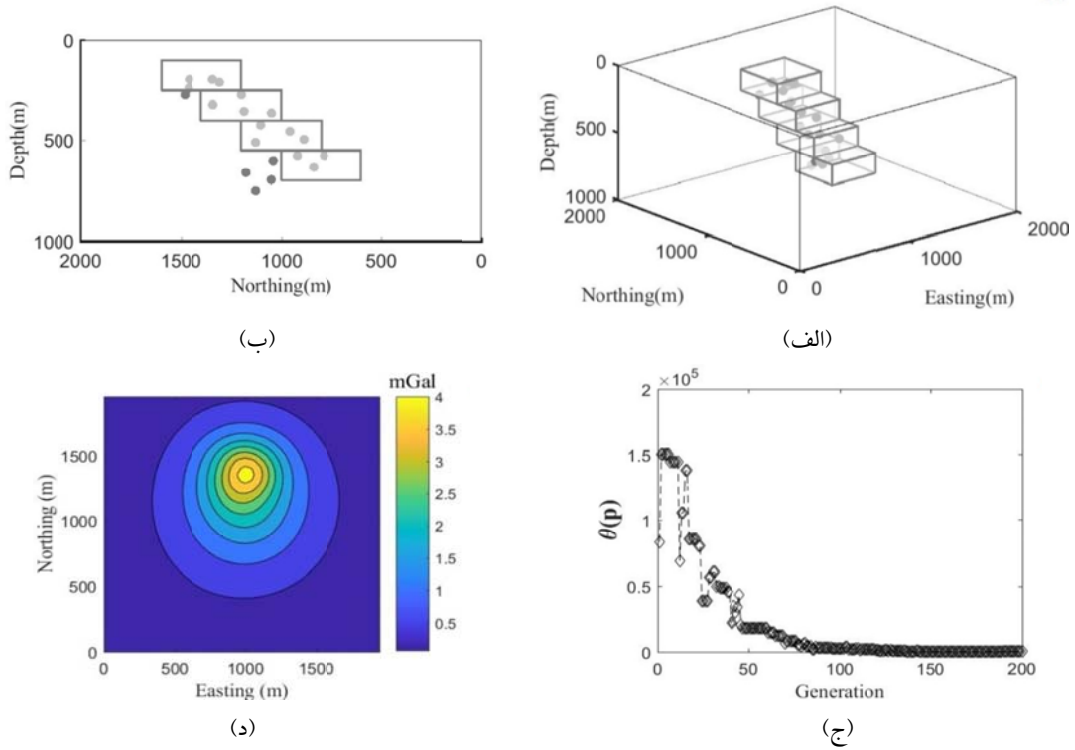


(د)

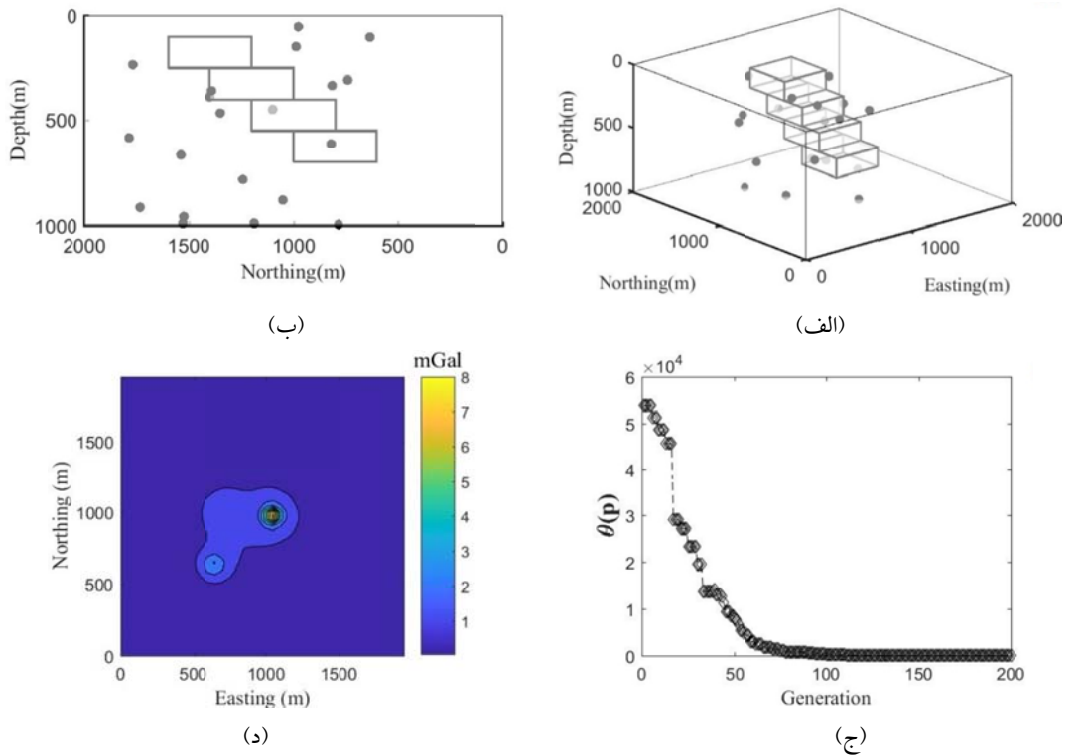


(ج)

شکل ۱۱. نتایج وارون‌سازی داده شکل ۱۰ با استفاده از پارامتر منظم‌سازی  $\lambda = 5e-9$ . (الف) نمای سه‌بعدی از مدل ساخته‌شده؛ (ب) نمای از مقابل؛ (ج) تابع هم‌فاصله  $\theta(\mathbf{p})$  برای تکرارهای متوالی الگوریتم ژنتیک؛ (د) داده گرانی حاصل از مدل.



شکل ۱۲. نتایج وارون‌سازی داده شکل ۱۰ با استفاده از پارامتر منظم‌سازی  $\lambda = 5e-4$ . الف) نمای سه‌بعدی از مدل ساخته‌شده؛ ب) نمای از مقابل؛ ج) تابع هم‌فاصله  $\theta(\mathbf{p})$  برای تکرارهای متوالی الگوریتم ژنتیک؛ د) داده گرانی حاصل از مدل.



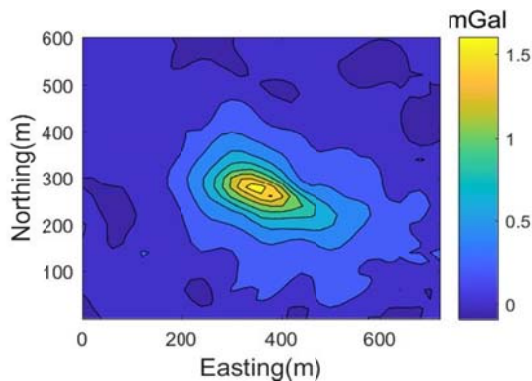
شکل ۱۳. نتایج وارون‌سازی داده شکل ۱۰ با استفاده از پارامتر منظم‌سازی  $\lambda = 5$ . الف) نمای سه‌بعدی از مدل ساخته‌شده؛ ب) نمای از مقابل؛ ج) تابع هم‌فاصله  $\theta(\mathbf{p})$  برای تکرارهای متوالی الگوریتم ژنتیک؛ د) داده گرانی حاصل از مدل.

۴. داده واقعی

در نهایت الگوریتم ارائه شده بر روی داده‌های گرانی برداشت شده بر روی توده مسیو سولفاید موبرون (Mobrun) در نزدیکی شهر نوراندا در ایالت کبک کانادا به کار می‌رود. سنگ میزبان برای این توده معدنی، سنگ‌های آتشفشانی پرکامبرین میانی می‌باشد. کانی‌سازی درون هاله سولفیدی متشکل از کانی پیریت به صورت توده‌ای و پراکنده به همراه مواد معدنی سولفیدی فلزات پایه با مقادیر کمی طلا و نقره است. این توده معدنی توسط محققان بسیاری مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان نمونه گرت و وست (۱۹۶۵) گسترش توده معدنی را در حدود ۳۰۰ متر، عرض آن را ۳۰ متر و بیشترین گسترش عمقی آن را ۱۸۰ متر برآورد کردند. همچنین آقاجانی و همکاران (۱۳۸۹) عمق بالای ماده معدنی را ۱۷ متر و ژرفای زیرین آن را در حدود ۱۷۵ متر تعیین کرده‌اند. جرم کل توده معدنی بر اساس محاسبات گرت و وست (۱۹۶۵) برابر

$2/56 \times 10^9$  است. این اطلاعات می‌تواند در تعیین حدود جستجو برای الگوریتم حاضر مورد استفاده قرار گیرد. شکل ۱۴ بی‌هنجاری گرانی بر روی این توده را نشان می‌دهد.

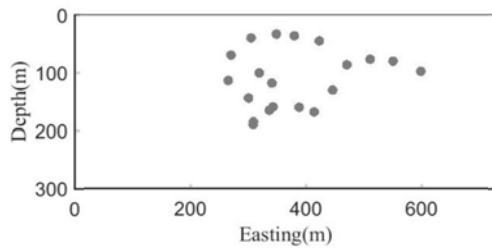
تعداد جرم‌های نقطه‌ای، اندازه جمعیت و تعداد نسل‌ها مشابه با مدل‌های مصنوعی انتخاب می‌شوند. محدوده جستجو برای این توده در جدول ۴ آورده شده است. وارون‌سازی با چند مقدار مختلف پارامتر منظم‌سازی انجام شده است. نتایج مربوط به پارامتر بهینه در شکل ۱۵ نشان داده شده‌اند. رفتار الگوریتم کاملاً مشابه با حالت داده‌های مصنوعی است و به همین دلیل می‌توان اطمینان بالایی به پارامتر انتخاب شده و صحت نتایج داشت. در این حالت، کمینه تابع هدف  $3/7895$  و جرم کل به دست آمده  $2/79 \times 10^9$  است. همچنین زمان مورد نیاز برای انجام محاسبات در حدود ۱۵۰ ثانیه می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که گسترش توده معدنی در جهت شرق حداکثر ۳۵۰ متر و در عمق ۲۰۰ متر است.



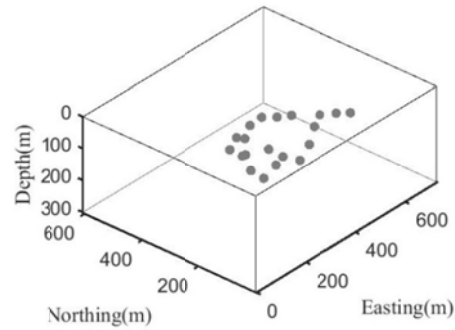
شکل ۱۴. داده گرانی بر روی توده معدنی موبرون. این داده از گرت و وست (۱۹۶۵) اقتباس شده است.

جدول ۴. حدود جستجو برای توده معدنی موبرون.

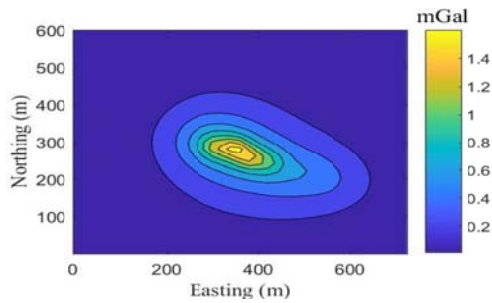
پارامتر	کمینه	بیشینه
$x_j (m)$	۲۰۰	۶۰۰
$y_j (m)$	۱۰۰	۴۵۰
$z_j (m)$	۱۰	۳۰۰
$m_i (kg)$	$2/2 \times 10^9$	$2/8 \times 10^9$



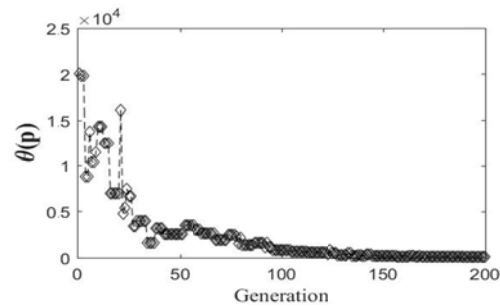
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۱۵. نتایج وارون‌سازی داده شکل ۱۴ با استفاده از پارامتر منظم‌سازی  $\lambda = 5e-4$ . (الف) نمای سه‌بعدی از مدل ساخته‌شده؛ (ب) نمای از مقابل از مدل؛ (ج) تابع هم‌فاصله  $\theta(\mathbf{p})$  برای تکرارهای متوالی الگوریتم ژنتیک؛ (د) داده گرانی حاصل از مدل.

##### ۵. نتیجه‌گیری

علاوه بر آن الگوریتم قادر بود که تخمین مناسبی از جرم کل توده معدنی ارائه دهد. الگوریتم ژنتیک برای کمینه کردن تابع هدف کلی استفاده شد. مدل‌های مصنوعی شامل دایک قائم و دایک شیب‌دار برای آزمودن الگوریتم و کدهای نوشته شده مورد استفاده قرار گرفت. در هر دو مورد الگوریتم رفتار مشابهی را نشان داد و قادر بود که پیکربندی توده‌های مربوطه را به خوبی نمایان سازد. نتایج نشان داد که الگوریتم وابستگی خیلی زیادی به تعیین دقیق محدوده جستجو ندارد و در یک گستره بسیار بزرگ‌تر از محدوده واقعی توده نیز قادر به ارائه جواب‌های دقیق است. همچنین الگوریتم وابستگی به انتخاب مدل اولیه ندارد. زمان اجرای الگوریتم برای این مدل‌ها چند دقیقه بود که در مقایسه با بسیاری الگوریتم‌های وارون‌سازی زمان اندکی محسوب می‌شود. البته بایست توجه داشت که انتخاب تعداد جرم‌های نقطه‌ای و نیز تعداد نسل‌های الگوریتم ژنتیک تأثیر

در این مقاله الگوریتم وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی با استفاده از تئوری گراف مورد بررسی قرار گرفت. این الگوریتم توسط بیجانی و همکاران (۲۰۱۵) معرفی شده است و در مقاله حاضر مفاهیم آن با جزئیات بیشتر برای خواننده ارائه شد. توده همگن زیرسطحی با مجموعه‌ای از جرم‌های نقطه‌ای مدل شد، بنابراین پیکره‌ای از توده برای کاربر نمایان شد. مجموعه این جرم‌های نقطه‌ای به عنوان رئوس یک گراف در نظر گرفته شد. با کاربرد الگوریتم کروسکال، درخت فراگیر کمینه برای گراف به دست آمد و در نهایت یک تابع پایدارکننده تحت عنوان تابع هم‌فاصله معرفی شد. نشان داده شد که کمینه کردن تابع هم‌فاصله سبب می‌شود که فواصل میان جرم‌های نقطه‌ای در مدل محاسبه شده تقریباً یکسان حاصل شود. بنابراین یک توزیع فضایی مناسب از جرم‌های نقطه‌ای سبب می‌شود که پیکره‌ای نزدیک به توده اصلی حاصل شود.

فوق، می‌تواند مناسب‌ترین پارامتر را از میان این مقادیر انتخاب نماید. بدیهی است که جواب حاصل از اجرای الگوریتم با استفاده از این پارامتر تنظیم به‌عنوان جواب بهینه است. الگوریتم بر روی داده گرانی توده سولفیدی موبرون مورد استفاده قرار گرفت. نتایج دلالت بر گسترش ۳۵۰ متری در راستای شرق و ۲۰۰ متری در عمق را دارد.

#### مراجع

آقاجانی، ح.، مرادزاده، ع. و زنگ، ه.، ۱۳۸۹، برآورد موقعیت افقی و ژرفای بی‌هنجاری‌های گرانی به کمک گرادیان کل بهنجار شده، علوم زمین، ۷۶، ۱۶۹-۱۷۶.

- Bijani, R., Ponte-Neto, C. F., Carlos, D. U. and Silva Dias, F. J. S., 2015, Three-dimensional gravity inversion using graph theory to delineate the skeleton of homogeneous sources, *Geophysics.*, 80, G53-G66.
- Blakely, R. J., 1995, *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Boschetti, F., Dentith, M. and List, R., 1995, A staged genetic algorithm for tomographic inversion of seismic refraction data, *Exploration Geophysics*, 26, 331-335.
- Boschetti, F., Dentith, M. and List, R., 1997, Inversion of potential field data by genetic algorithms, *Geophysical Prospecting*, 45, 461-478.
- Bott, M., 1960, The use of rapid digital computing methods for direct gravity interpretation of sedimentary basins, *Geophys. J. Int.*, 3, 63-67.
- Boulianger, O. and Chouteau M., 2001, Constraint in 3D gravity inversion, *Geophysical Prospecting*, 49, 265-280.
- Chakravarthi, V. and Sundararajan, N., 2007, 3D gravity inversion of basement relief a depth-dependent density approach, *Geophysics*, 72, I23-I32.
- Deo, N., 1974, *Graph theory with applications to engineering and computer science*: PHI Learning Pvt. Ltd.
- Goldberg, D. E. and Holland, J. H., 1988, Genetic algorithms and machine learning, *Machine Learning*, 3, 95-99.
- Grant, F. S. and West, G. F., 1965, *Interpretation Theory in Applied Geophysics*, McGraw-Hill.

مستقیمی بر زمان محاسبات دارد. افزایش تعداد این دو پارامتر سبب خواهد شد که زمان بیشتری برای اجرای الگوریتم مورد نیاز باشد. به‌رحال بررسی‌ها نشان داد که نیازی به استفاده از مقادیر بیشتر از آنچه که در این مقاله استفاده شده است، نیست. همچنین نشان داده شد که اگر تابع هم‌فاصله به سمت صفر همگرا باشد، مقدار کمینه تابع هدف کوچک بوده و آتومالی حاصل از مدل با داده ورودی تطابق خوبی داشته باشد، پارامتر منظم‌سازی انتخاب شده بهینه است و به نتایج می‌توان اطمینان بیشتری داشت. بنابراین راه‌کاری جذاب برای تعیین پارامتر تنظیم ارائه شد. کاربرد با انتخاب تعدادی پارامتر در یک محدوده‌ای شامل مقادیر کوچک تا بزرگ و اجرای الگوریتم برای این مقادیر و سپس چک کردن شروط

- Kruskal, J. B., Jr., 1956, On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7, 48-50.
- Last, B. J. and Kubik, K., 1983, Compact gravity inversion, *Geophysics*, 48, 713-721.
- Li, Y. and Oldenburg, D. W., 1998, 3D inversion of gravity data, *Geophysics*, 63, 109-119.
- Martins, C. M., Lima, W. A., Barbosa, V. C. and Silva, J. B., 2011, Total variation regularization for depth-to-basement estimate: Part 1 — Mathematical details and applications, *Geophysics*, 76, I1-I12.
- Montana, D. J., 1994, Strongly typed genetic programming, *Evolutionary Computation*, 3, 199-230.
- Portniaguine, O. and Zhdanov, M. S. 1999, Focusing geophysical inversion images, *Geophysics*, 64, 874-887.
- Vatankhah, S., Ardestani, V. E. and Renaut R. A., 2015, Application of the  $\chi^2$  principle and unbiased predictive risk estimator for determining the regularization parameter in 3-D focusing gravity inversion, *Geophys. J. Int.*, 200, 265-277.
- Vatankhah, S., Renaut, R. A. and Ardestani, V. E., 2017, 3-D Projected L1 inversion of gravity data using truncated unbiased predictive risk estimator for regularization parameter estimation, *Geophys. J. Int.*, 210, 1872-1887.
- Zeyen, H. and Pous, J., 1993, 3-D joint inversion of magnetic and gravimetric data with a priori information, *Geophys. J. Int.*, 112, 244-256.



## Using graph theory in 3D inversion of gravity data to delineate the skeleton of homogeneous subsurface sources

Soodmand niri, S.<sup>1</sup>, Ebrahimzadeh Ardestani, V.<sup>2\*</sup> and Vatankhah, S.<sup>3</sup>

1. M.Sc. Student, Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

2. Professor, Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

3. Assistant Professor, Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

(Received: 25 Jun 2018, Accepted: 1 Jan 2019)

### Summary

In this paper, three-dimensional (3D) inversion of gravity data using graph theory is used. The methodology was initially introduced by Bijani et al. (2015) and, here, we provide more details for the steps and required parameters of the algorithm. An ensemble of simple point masses are used to model a homogeneous subsurface body. Then, in the presented inversion methodology, the model parameters are the Cartesian coordinates of point masses and their total mass. Consequently, the algorithm is able to reconstruct the skeleton of the subsurface body and to yield its total mass. Here, the set of point masses is associated to the vertices of a weighted full graph in which the weights are computed by the Euclidean distances separating vertices in pairs. Then, the Kruskal's algorithm can be used to solve the Minimum Spanning Tree (MST) problem for the graph. A stabilizer, called equidistance function, is obtained using the MST, which computes the statistical variance of the distances among point masses. The function restricts the spatial distribution of points, and suggests a homogeneous distribution for the point masses in the subsurface. Here, a non-linear global objective function for the model parameters comprising data misfit term and equidistance function with balancing provided by a regularization parameter that should be minimized. A genetic algorithm (GA) is used for the minimization of the objective function. GA consists of a random search algorithm based on the mechanism of natural selection and natural genetics. Then, to solve the optimization problem in our algorithm, there is no need to calculate the derivatives of the objective function with respect to model parameters, or any matrix operation. Simulations for two synthetic examples, including a vertical and a dipping dike, demonstrate the efficiency and effectiveness of the implementation of the present algorithm. The skeleton and total mass of the bodies are estimated very accurately. We also show that although the search limits for the model parameters must be used, they are not very limitative. Even with less realistic bounds, acceptable approximations of the body are still obtained. Unlike Bijani et al. (2015) which used the L-curve method for estimating the regularization parameter, here, we present a new strategy to approximate the parameter. We demonstrate that if: 1. the equidistance function converges almost monotonically to zero with increasing numbers of generation; 2. minimum of the objective function at the final iteration becomes small; and 3. the predicted data by the reconstructed model is approximately close to observed data, then, the selected regularization parameter is nearly optimum and the results are reliable. This provides a suitable and inexpensive methodology for estimating the regularization parameter. The method is tested on gravity data from the Mobern ore body, north east of Noranda, Quebec, Canada. The anomaly is associated with a massive body of base metal sulfide, mainly pyrite, which has displaced volcanic rocks of middle Precambrian age (Grant and West, 1965). With application of the algorithm, a skeleton of the body is obtained which extends about 350 m in the east direction, and shows a maximum extension of 200 m in depth.

**Keywords:** Gravimetry, Inversion, Graph, Minimum Spanning tree, Genetic Algorithm, Mobern.

---

\* Corresponding author:

ebrahimz@ut.ac.ir