

شناسایی ضعف در میانگین‌گیری برداری داده‌های مغناطیدگی و روشی برای برطرف کردن این ضعف

محمد احسان حکمتیان*

استادیار، پژوهشکده مواد و سوخت هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی ایران، تهران، ایران

(دریافت: ۹۷/۵/۲۹، پذیرش نهایی: ۹۸/۲/۲۴)

چکیده

در جوامع معمولی آماری، اغلب وضعیت توزیع عادی یا نرمال حاکم است و لذا در آنها استفاده از تابع چگالی احتمال گوسی یا نرمال و استفاده از میانگین‌گیری حسابی یا معمولی کار صحیحی می‌باشد. اما اگر جامعه آماری از تعدادی جهت دلخواه فضایی تشکیل شده باشد، وضعیت توزیع عادی یا نرمال حاکم نمی‌باشد. در این شرایط از تابع چگالی احتمال فیشر و میانگین‌گیری برداری می‌توان بهره برد. یکی از جوامع آماری جهتی، جامعه آماری جهت‌های مختلف مغناطیدگی سنگ‌ها است. در این مقاله پس از یک مقدمه، برای درک بهتر تفاوت جامعه آماری معمولی و جامعه آماری جهتی، هم پراکندگی نرمال و هم پراکندگی فیشر (که برای جامعه جهتی استفاده می‌شود) مورد بحث قرار می‌گیرد. در ادامه الگوریتم محاسبه جهت میانگین مجموعه بردارها مطرح می‌شود. سپس به یک برنامه رایانه‌ای دارای توانایی میانگین‌گیری برداری که در جریان همین پژوهش تولید شده، اشاره شده است و بعد میانگین‌گیری برداری و حسابی با استفاده از داده‌های مغناطیدگی مقایسه شده‌اند. در این پژوهش معلوم شد که یک ضعف در میانگین‌گیری برداری وجود دارد و آن اینکه در بعضی شرایط جواب میانگین‌گیری برداری یکتا نمی‌باشد. راه‌حل ارائه شده در این پژوهش برای رفع این ضعف این است که در کنار میانگین‌گیری برداری، مناسب است که میانگین‌گیری معمولی یا حسابی هم صورت بگیرد تا در مواردی که جواب میانگین‌گیری برداری چند جهت متفاوت است، بتوانیم میانگین برداری صحیح را تشخیص دهیم.

واژه‌های کلیدی: میانگین‌گیری برداری، میانگین‌گیری حسابی، جهت‌های مغناطیدگی.

۱. مقدمه

متفاوتی ممکن است ذخیره شده باشد. همچنین حتی اگر کانسار یا سنگی دارای مغناطش ثابت و با یک جهت به‌خصوص باشد باز هم در تخمین این جهت به‌خصوص ممکن است چند جهت احتمالی تخمین زده شود. لذا در ارتباط با جهت‌های مغناطیدگی القایی، مغناطیدگی بازماند و مغناطیدگی کل، با جوامع جهتی سروکار داریم. تعدادی از منابعی که در زمینه دیرینه‌مغناطیس و مغناطیدگی بحث کرده‌اند عبارتند از:

باتلر (۲۰۰۴)، بات و همکاران (۱۹۶۶)، کلارک (۲۰۱۲)،
۲۰۱۳، ۲۰۱۴، دانمیلر و لی (۲۰۰۶)، فدی و همکاران
(۱۹۹۴)، گروسکا و همکاران (۲۰۰۹)، مکزی و همکاران
(۲۰۱۲)، روئست و پیلکینگتن (۱۹۹۳)، اشتترلز و تیلور
(۱۹۸۴)، استاورو و گروسکا (۲۰۰۰) و ژانگ و همکاران
(۲۰۱۸). البته مبحث میانگین‌گیری برداری برای بررسی

بعضی از جوامع آماری در علوم زمین جوامع جهتی هستند یعنی از تعدادی جهت دلخواه فضایی تشکیل شده‌اند. از جمله این جوامع جهتی، جامعه شامل جهت‌های مغناطیدگی است. مغناطیدگی القایی کانسارها و سنگ‌ها را می‌توان هم جهت با میدان مغناطیسی زمین در حال حاضر در نظر گرفت. جهت میدان مغناطیسی زمین در حال حاضر کاملاً شناخته شده است و لذا در حال حاضر در هر نقطه از کره زمین برای آن جهت مشخصی وجود دارد. اما مغناطیدگی بازماند کانسارها و سنگ‌ها (در صورتی که دارای مغناطیدگی بازماند باشند) نتیجه جهات و مقادیر مختلف میدان مغناطیسی گذشته زمین در طول عمر کانسار یا سنگ بوده است و لذا چند بار ممکن است عوض شده باشد و در قسمت‌های مختلف کانسار و یا سنگ هم بنا به شرایط گذشته مقادیر و جهات مغناطیدگی

میانگین‌گیری حسابی در مورد جهت‌ها، در شرایطی ممکن است کاملاً گمراه‌کننده باشد. مثلاً اگر تمام جهت‌ها دارای زاویه میل برابر ۸۹ درجه باشند، اختلاف ۱۸۰ درجه‌ای بین زوایای انحراف جهت‌های مختلف، نشانگر اختلاف ۲ درجه‌ای بین آنهاست. لذا در حالت کلی میانگین‌گیری معمولی (حسابی) در یک جامعه جهتی کار صحیحی نیست و نیازمند میانگین‌گیری مناسب خاص خود هستیم که در این باره در این پژوهش به بحث خواهیم پرداخت. مرجع اصلی این پژوهش، حکمتیان (۱۳۹۷) می‌باشد.

۲. آمار داده‌های پالئومغناطیسی

با توجه به آنچه که در مقدمه ذکر شد در داده‌های پالئومغناطیسی یا دیرینه‌مغناطیسی، محتاج داشتن تحلیل آماری مناسبی هستیم. مثلاً همان‌طور که ذکر شد ما نیازمند تعیین جهت متوسط مغناطیدگی هستیم و تحلیل آماری لازم است که ابهامات خاص موجود در آمار مربوط به جهت‌ها را در نظر بگیرد. همان‌طور که می‌دانیم در بسیاری از فعالیت‌های علمی در شاخه‌های مختلف علوم از تحلیل آماری نرمال (تابع چگالی احتمال گوسی (Gaussian probability density function)) استفاده می‌شود. تحلیل آماری جهتی (مانند تحلیل آماری جهتی در دیرینه‌مغناطیس) با ایده‌گیری از تحلیل آماری نرمال مطرح شده است. تابع چگالی آماری قابل استفاده در تحلیل آماری جهتی، تابع چگالی احتمال فیشر (Fisher) می‌باشد. فیشر (۱۹۳۵) یک متخصص آمار بود که اولین بار این تابع چگالی احتمال را مطرح کرد. به دلیل اینکه تحلیل آماری جهتی (فیشر) با ایده‌گیری از تحلیل آماری نرمال مطرح شده است، لذا در ادامه این کار ابتدا تحلیل آماری نرمال و سپس تحلیل آماری فیشر ذکر می‌شود.

۲-۱. پراکنندگی نرمال

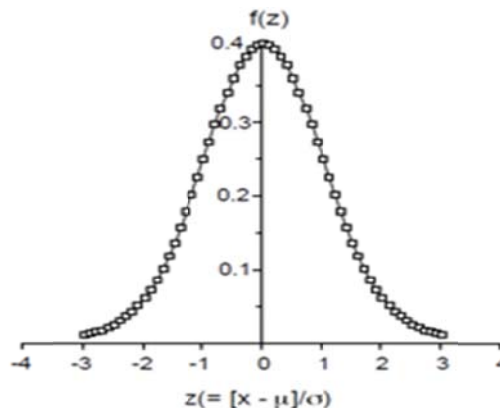
اساس هر روش آماری برای تشخیص میانگین و حدهای اعتماد (confidence limits) مربوط به مجموعه

صحیح‌تر تمام مجموعه داده‌های برداری (در تمام رشته‌های علمی دیگر هم) مفید است.

در هر صورت بسته به شرایط برای به‌دست آوردن جهت متوسط مغناطش مجبوریم متوسل به میانگین‌گیری شویم و میانگین‌گیری جهت‌ها یا بردارها لازم است به طریق خاصی صورت گیرد. قبل از شروع بحث معرفی چند مفهوم مفید به نظر می‌رسد. جهت میدان مغناطیسی و همچنین جهت مغناطش با دو زاویه میل (inclination) و انحراف (declination) بیان می‌شود. زاویه میل، زاویه‌ای است که بردار میدان یا بردار مغناطش با افق می‌سازد. اگر این زاویه زیر سطح افق باشد مثبت و اگر بالای سطح افق باشد منفی در نظر گرفته می‌شود. پس زاویه میل بین ۹۰- تا ۹۰ درجه می‌تواند باشد. زاویه انحراف، زاویه‌ای است که تصویر بردار میدان یا بردار مغناطش در افق با جهت شمال جغرافیایی می‌سازد. اگر این زاویه در سمت شرق باشد مثبت و اگر در سمت غرب باشد منفی در نظر گرفته می‌شود. لذا زاویه انحراف بین ۱۸۰- تا ۱۸۰ درجه می‌تواند باشد. همچنین به‌طور کلی زاویه‌ای که تصویر یک بردار در افق با جهت شمال جغرافیایی می‌سازد را به‌طور کلی آزیموت (azimuth) می‌نامند. بنابراین آزیموت و زاویه انحراف در مورد بردار میدان مغناطیسی و بردار مغناطش، یک چیز می‌باشند. پس از بیان این چند مفهوم، در اینجا دلیل مناسب‌تر بودن میانگین‌گیری برداری از میانگین‌گیری معمولی را مطرح می‌کنیم. البته میانگین‌گیری معمولی (حسابی) در مورد جهت‌ها (زوایای میل و انحراف)، در شرایطی ممکن است درست باشد. مثلاً اگر تمام جهت‌ها دارای زاویه میل برابر صفر درجه باشند در این صورت میانگین حسابی زوایای میل جهات مذکور هم صفر درجه است و همچنین در این صورت وجود هر مقدار اختلاف بین زاویه‌های انحراف جهت‌های مختلف، مثلاً وجود صفر، ۱۰، ۱۸۰ و یا هر مقدار اختلاف دیگر، نه تنها به معنای همان مقدار اختلاف بین زاویه‌های انحراف جهت‌های مختلف است، بلکه نشانگر همان مقدار انحراف در بین جهت‌های مختلف می‌باشد. اما

مشاهدات، یک تابع چگالی احتمال است. تابع مذکور پراکندگی مشاهدات در هر مجموعه محدود از مشاهدات که یک جامعه یا جمعیت (population) نامیده می‌شود را توصیف می‌کند. تابع چگالی احتمال گوسی یا همان پراکندگی نرمال همان‌طور که می‌دانیم دارای شکل زنگوله‌مانندی مثل شکل ۱ است.

مشاهدات، یک تابع چگالی احتمال است. تابع مذکور پراکندگی مشاهدات در هر مجموعه محدود از مشاهدات که یک جامعه یا جمعیت (population) نامیده می‌شود را توصیف می‌کند. تابع چگالی احتمال گوسی یا همان پراکندگی نرمال همان‌طور که می‌دانیم دارای شکل زنگوله‌مانندی مثل شکل ۱ است.



شکل ۱. تابع چگالی احتمال گوسی یا همان پراکندگی نرمال (معادله (۱)). در این شکل X مقدار مشاهده شده، μ مقدار میانگین مشاهدات و σ مقدار انحراف معیار مشاهدات است (باتلر، ۲۰۰۴).

آن را با m نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2)$$

در رابطه فوق n تعداد نمونه‌ها و x_i مقادیر مربوط به نمونه‌ها است.

همچنین (بر اساس نمونه‌های محدود) مقادیر پراش (var(x) or variance) و انحراف معیار (s or standard deviation) هم با رابطه زیر به دست می‌آید که S تقریب مناسبی برای σ (مقدار واقعی انحراف معیار) می‌باشد.

$$\text{var}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{(n-1)} = s^2 \quad (3)$$

در این حالت (یعنی بر اساس نمونه‌های محدود)، خطای استاندارد (standard error) مقدار میانگین با رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta m = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

اگر از یک جامعه کاملاً نرمال تعدادی مجموعه نمونه محدود خارج شود، در این صورت ۶۸ درصد میانگین‌های این مجموعه نمونه‌ها در بازه به پهنای دو برابر σ/\sqrt{n} (با مرکزیت μ) قرار خواهد گرفت و ۹۵ درصد میانگین‌های این مجموعه نمونه‌ها در بازه به پهنای چهار برابر σ/\sqrt{n} (با مرکزیت μ) واقع خواهد شد. لذا میانگین‌های این مجموعه نمونه‌ها خود دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ/\sqrt{n} است. لذا خطای

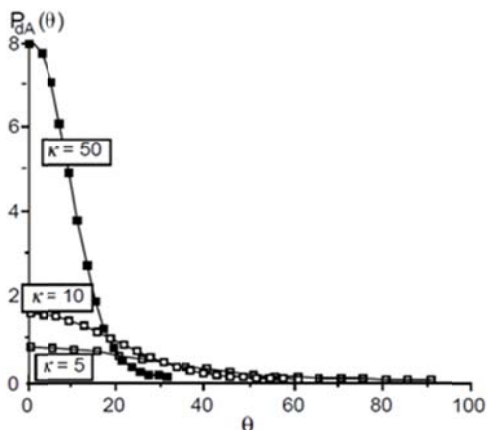
در شکل فوق معنی تابع چگالی احتمال $f(z)$ این است که درصدی از مشاهدات که در بازه dz به مرکزیت Z قرار دارد، برابر $f(z)dz$ می‌باشد. و تابع چگالی احتمال $f(z)$ عبارت است از:

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \quad (1)$$

و در رابطه فوق $z = (x - \mu) / \sigma$ است و همان‌طور که در توضیح شکل ۱ آمده است X مقدار مشاهده شده، μ مقدار میانگین مشاهدات و σ مقدار انحراف معیار مشاهدات است و مقدار پراکندگی حول مقدار میانگین را مشخص می‌کند. با انجام انتگرال گیری بر روی منحنی شکل ۱ مشخص می‌شود که ۶۸ درصد مشاهدات در بازه به پهنای دو برابر σ (با مرکزیت μ) قرار دارد و همچنین ۹۵ درصد مشاهدات در بازه به پهنای چهار برابر σ (با مرکزیت μ) واقع است.

یکی از شرایط معمول این است که تعداد مشاهدات از متغیر X محدود است. در این شرایط به هر کدام از

واقعی است. اگر مقدار پارامتر K صفر باشد یعنی در جامعه آماری مورد نظر پراکندگی جهات در سطح یک کره یکنواخت است و اگر مقدار پارامتر مذکور بی نهایت باشد یعنی تمام جهات جامعه آماری در یک نقطه از سطح کره متمرکز شده‌اند. در شکل ۲ تابع چگالی احتمال فیشر $P_{dA}(\theta)$ برای پارامتر K برابر ۵، ۱۰ و ۵۰ رسم شده است:



شکل ۲. تابع چگالی احتمال فیشر $P_{dA}(\theta)$ برای پارامتر K برابر ۵، ۱۰ و ۵۰. در شکل فوق K پارامتر دقت (precision parameter) است (باتلر، ۲۰۰۴).

همان‌طور که از توصیف تابع چگالی احتمال فیشر $P_{dA}(\theta)$ قابل انتظار بود و در شکل فوق دیده می‌شود، این تابع بیشترین احتمال را در جهت میانگین نشان می‌دهد و هرچه پارامتر K بزرگ‌تر باشد، جهت‌های جامعه آماری تمرکز بیشتری در نزدیکی جهت میانگین از خود نشان می‌دهند. قبلاً بیان کردیم که تابع چگالی احتمال فیشر $P_{dA}(\theta)$ احتمال داشتن یک جهت به‌خصوص در ناحیه زاویه‌ای واحدی از ناحیه زاویه‌ای dA (دارای مرکزیت زاویه θ) را نشان می‌دهد. بنابراین احتمال داشتن یک جهت به‌خصوص در ناحیه زاویه‌ای dA (دارای مرکزیت زاویه θ) برابر $dAP_{dA}(\theta)$ خواهد بود. در این شرایط اگر زاویه آزیموت (یا به عبارتی زاویه انحراف (declination)) باشد (و θ هم حکم زاویه میل (inclination) را دارد)، در این صورت dA برابر $d\theta d\zeta \sin(\theta)$ است و بنابراین احتمال داشتن یک جهت به‌خصوص در ناحیه زاویه‌ای dA (دارای مرکزیت زاویه θ) برابر رابطه زیر خواهد بود:

استاندارد مقدار میانگین (رابطه ۴)، یک حد اطمینان (confidence limit) برای مقدار میانگین محاسباتی m فراهم می‌آورد. لذا می‌توان گفت که اگر از یک جامعه آماری به‌طور اتفاقی یک مجموعه نمونه استخراج کنیم، مقدار میانگین این مجموعه نمونه به احتمال ۹۵ درصد برابر یک مقدار در بازه $2\Delta m \pm \bar{m}$ است. این واقعیت به این صورت هم بیان می‌شود که حد اطمینان ۹۵ درصد برای مقدار میانگین m برابر $2\Delta m$ می‌باشد.

۲-۲. پراکندگی فیشر (The Fisher distribution)

تابع چگالی احتمال قابل کاربرد در جهات دیرینه مغناطیس تابع چگالی احتمال فیشر می‌باشد و به آن پراکندگی فیشر هم می‌گویند. ما می‌توانیم به هر جهت یک وزن واحد بدهیم و هر جهت را با یک نقطه در کره به شعاع واحد نمایش دهیم. تابع چگالی احتمال فیشر $P_{dA}(\theta)$ احتمال داشتن یک جهت به‌خصوص در ناحیه زاویه‌ای واحدی از ناحیه زاویه‌ای dA (دارای مرکزیت زاویه θ) را نشان می‌دهد. زاویه θ زاویه از جهت میانگین واقعی است. واحد ناحیه زاویه‌ای dA استرادیان (steradian) است. البته بهتر است اشاره شود که ناحیه زاویه‌ای مربوط به کل سطح یک کره برابر 4π استرادیان می‌باشد. پراکندگی جهات مختلف که هر جهت زاویه θ خاص خود را با جهت میانگین واقعی می‌سازد بر طبق تابع چگالی فیشر به‌صورت زیر است:

$$P_{dA}(\theta) = \frac{K}{4\pi \sinh(K)} \exp(K \cos \theta) \quad (5)$$

در رابطه فوق θ در جهت میانگین واقعی برابر صفر است و K پارامتر دقت (precision parameter) می‌باشد. در این تابع چگالی احتمال پراکندگی آزیموت حول جهت میانگین واقعی متقارن است (زاویه آزیموت (یا به بیانی زاویه انحراف) در سطح افقی اندازه‌گیری می‌شود و بازه تغییرات آن از -180 تا 180 است و لذا متقارن محسوب کردن پراکندگی آزیموت غیرمنطقی به نظر نمی‌رسد). پارامتر K اندازه‌ای از تمرکز جهات حول مقدار میانگین

تعداد زیادی از جهات است که از تابع چگالی احتمال فیشر تبعیت کنند. ولی در دیرینه مغناطیس معمولاً دارای تعداد محدودی از جهات می‌باشیم که برای آن هم لازم است جهت میانگین را محاسبه کنیم. همچنین برای همین تعداد محدود از جهات ممکن است لازم شود پارامتر آماری نشان‌دهنده میزان پراکندگی جهات (یعنی چیزی مشابه انحراف معیار در پراکندگی نرمال) را معرفی نماییم. به‌علاوه تعریف یک حد اطمینان (confidence limit) برای جهت میانگین محاسبه شده (مشابه با خطای استاندارد میانگین محاسبات در پراکندگی نرمال) هم ممکن است لازم شود. مباحث زیر بر اساس باتلر (۲۰۰۴) برای موارد مذکور به کار گرفته می‌شود:

مقدار میانگین محاسباتی برای جهاتی که در اختیار داریم، با استفاده از جهت برآیند بردارها به دست می‌آید. به شکل ۴ توجه شود:

$$P_{dA}(\theta)dA = P_{dA}(\theta)\sin(\theta)d\theta d\xi \quad (6)$$

مسلّم است که اگر در ناحیه زاویه‌ای dA برابر کل سطح کره باشد احتمال داشتن یک جهت به‌خصوص در این سطح صد درصد است و به عبارت دیگر خواهیم داشت:

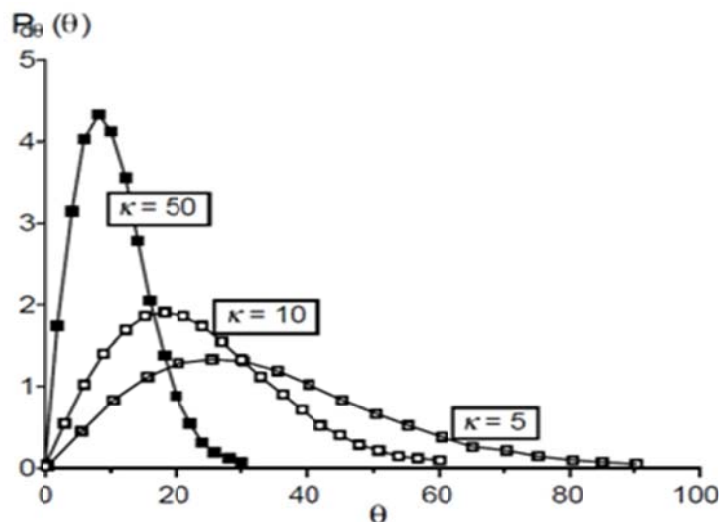
$$\int_{\xi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} P_{dA}(\theta)\sin(\theta)d\theta d\xi = 1.0 \quad (7)$$

ولذا احتمال قرار گرفتن یک جهت در محدوده θ و $\theta + d\theta$ برابر است با:

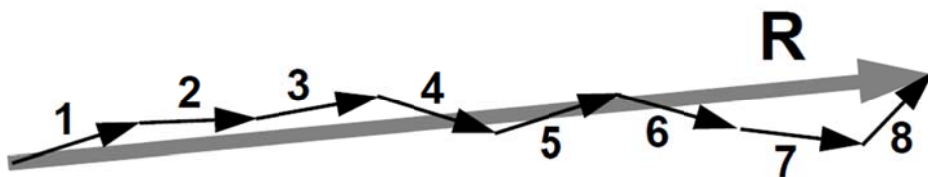
$$P_{d\theta}(\theta) = \int_{\xi=0}^{2\pi} P_{dA}(\theta)dA = 2\pi P_{dA}(\theta)\sin(\theta)d\theta \\ = \frac{K}{2 \sinh(K)} \exp(K \cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (8)$$

در شکل ۳ تابع $P_{d\theta}(\theta)$ برای پارامتر K برابر ۵، ۱۰ و ۵۰ رسم شده است و تأثیر جمله $\sin(\theta)$ در آن مشهود است.

۳. محاسبه جهت میانگین مجموعه بردارها
مباحثی که در بحث قبلی بیان شد در ارتباط با جمعیتی با



شکل ۳. تابع $P_{d\theta}(\theta)$ برای پارامتر K برابر ۵، ۱۰ و ۵۰ (باتلر، ۲۰۰۴).



شکل ۴. بردار برآیند ۸ بردار واحد که به ما جهت میانگین محاسباتی R را ارائه کرده است (باتلر، ۲۰۰۴).

با توجه به رابطه (۱۳) مقدار K در شرایطی که R با مقدار N تقریباً برابر شود خیلی بزرگ می‌شود. با مقایسه با آمار نرمال مقدار واریانس زاویه‌ای یک مجموعه جهت برابر می‌شود با:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \Delta_i^2 \quad (14)$$

در رابطه فوق Δ_i زاویه بین جهت Δ_m و جهت میانگین محاسباتی است. در این حال انحراف معیار زاویه‌ای تخمین زده شده

s (The estimated angular standard deviation) می‌باشد. این پارامتر پراکندگی زاویه‌ای (angular dispersion) هم نامیده می‌شود. پارامتر آماری دیگری که آن هم اندازه‌ای از پراکندگی زاویه‌ای را به ما ارائه می‌دهد و اغلب این پارامتر هم به نام انحراف معیار زاویه‌ای (The angular standard deviation) نامیده می‌شود، پارامتر δ است که با رابطه زیر ارائه می‌شود:

$$\delta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{N}\right) \quad (15)$$

فایده استفاده از رابطه (۱۵) محاسبه و مفهوم ساده‌تر آن است (شکل ۴ را ببینید).

اما در ارتباط با حد اطمینان (confidence limit) برای جهت میانگین محاسبه شده باید گفت روند محاسبه مشابه با خطای استاندارد میانگین محاسبات در پراکندگی نرمال است. حد اطمینان در اینجا به‌عنوان اختلاف زاویه بین جهت میانگین واقعی و جهت میانگین محاسباتی ذکر می‌شود. یک سطح احتمال هم باید برای این حد اطمینان در نظر گرفته شود. اگر احتمال اینکه حد اطمینان درست نباشد یا بیان دیگر احتمال اینکه اختلاف زاویه بین جهت میانگین واقعی و جهت میانگین محاسباتی بیش از حد اطمینان باشد برابر p باشد. در این صورت حد اطمینان با سطح احتمال $(1-p)$ برابر $\alpha_{(1-p)}$ است. به بیان ساده‌تر حداکثر زاویه بین جهت میانگین واقعی و جهت میانگین محاسباتی به احتمال $(1-p)$ برابر $\alpha_{(1-p)}$ می‌باشد. معمولاً می‌خواهیم بدانیم که به احتمال ۹۵ درصد، حداکثر چه زاویه‌ای بین جهت میانگین واقعی و جهت میانگین

برای محاسبه جهت برآیند بردارها (که مثلاً شامل N بردار باشد)، ابتدا لازم است کسینوس‌های هادی تک تک بردارها طبق روابط (۹) محاسبه شود:

$$\begin{aligned} l_i &= \cos I_i \cos D_i & m_i &= \cos I_i \sin D_i \\ n_i &= \sin I_i \end{aligned} \quad (9)$$

در رابطه فوق D_i زاویه انحراف (declination) بردار l_i و I_i زاویه میل (inclination) بردار n_i است. همچنین در رابطه مذکور l_i ، m_i و n_i کسینوس‌های هادی بردار l_i نسبت به جهات شمال، شرق و پایین است. کسینوس‌های هادی جهت میانگین محاسباتی (که نشان‌دهنده جهت برآیند بردارها یا جهت‌های مختلف است) یعنی l ، m و n از روی کسینوس‌های هادی بردار l_i طبق رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$l = \frac{\sum_{i=1}^N l_i}{R} \quad m = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{R} \quad n = \frac{\sum_{i=1}^N n_i}{R} \quad (10)$$

در رابطه فوق R طول بردار برآیند است که با رابطه زیر داده می‌شود.

$$R^2 = \left(\sum_{i=1}^N l_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N m_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N n_i\right)^2 \quad (11)$$

مقدار R همیشه از N (تعداد بردارها) کمتر و یا حداکثر مساوی آن است.

بالأخره از روی کسینوس‌های هادی جهت میانگین محاسباتی یا همان جهت برآیند بردارها، زاویه میل و انحراف جهت میانگین محاسباتی به‌صورت رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$D_m = \tan^{-1}(m/l) \quad I_m = \sin^{-1}(n) \quad (12)$$

در رابطه فوق، D_m زاویه انحراف و I_m زاویه میل جهت میانگین محاسباتی است.

اما در ارتباط با میزان پراکندگی جهات در یک جامعه آماری جهتی باید گفت که یکی از پارامترهای نشان‌دهنده میزان پراکندگی جهات، پارامتر دقت K است. تخمین مناسبی از K می‌تواند با رابطه زیر داده شود:

$$K = \frac{N-1}{N-R} \quad (13)$$

جهت مغناطش توسط نرم‌افزار نام‌برده در حکمتیان (۲۰۱۹) آمده است. در اینجا فقط به‌طور مختصر بیان می‌کنیم که این الگوریتم عبارت‌است از اینکه با داشتن مختصات نقطه‌ای از سطح زمین که درست در بالای مرکز ثقل منبع مولد مغناطیسی (کانسار) قرار گرفته است و سپس محاسبه نقشه‌های شبه‌گرانی متعدد از روی نقشه مغناطیسی با در نظر گرفتن تمام جهات ممکن برای جهت مغناطش کانسار، آن جهت که باعث شود که ماکزیمم داده‌های شبه‌گرانی (در محدوده کانسار مورد بررسی) در نقطه مذکور قرار گیرد، جهت صحیح مغناطش کانسار می‌باشد. برای یافتن نقطه نام‌برده از روش‌های مختلفی می‌توان بهره برد، مثلاً با استفاده داده‌های سیگنال تحلیلی (گرادیان کلی) یا با استفاده داده‌های (Normalized) NSS (Source Strength) (مراجعه شود به کلارک (۲۰۱۲)، ۲۰۱۳، ۲۰۱۴)، بیکی و همکاران (۲۰۱۲) و پیلکینگتون و بیکی (۲۰۱۳)).

جهت واقعی مغناطیسی این منبع مصنوعی عبارت‌است از:

- زاویه میل مغناطیسی برابر ۵ درجه

- زاویه انحراف مغناطیسی برابر ۱ درجه

۹ جهت تخمین زده شده برای جهت مغناطیسی منبع مصنوعی مغناطیسی نام‌برده و مقدار میانگین حسابی این جهت‌ها در شکل زیر نشان داده شده است:

1	Es.m.inclination= -9	Es.m.declination= 2
2	Es.m.inclination= -9	Es.m.declination= 3
3	Es.m.inclination= -8	Es.m.declination= 2
4	Es.m.inclination= -8	Es.m.declination= 3
5	Es.m.inclination= -7	Es.m.declination= 2
6	Es.m.inclination= -6	Es.m.declination= 2
7	Es.m.inclination= -5	Es.m.declination= 1
8	Es.m.inclination= -4	Es.m.declination= 1
9	Es.m.inclination= -3	Es.m.declination= 1
10		
11	Average Estimated results are:	
12	Aver.Es.m.inc= -6.56	Aver.Es.m.dec= 1.89

شکل ۵. ۹ جهت تخمین زده شده برای جهت مغناطیسی و مقدار میانگین حسابی این جهت‌ها.

محاسباتی وجود دارد و آن را با $\alpha_{0.5}$ نشان می‌دهیم که در این مورد $p=0.05$ خواهد بود. در هر صورت حد اطمینان $\alpha_{(1-p)}$ (یعنی با سطح احتمال $(1-p)$) با رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\cos \alpha_{(1-p)} = 1 - \frac{N-R}{R} \left\{ \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{N-1}} - 1 \right\} \quad (16)$$

روابط (۱۳) تا (۱۶) هم بر اساس باتلر (۲۰۰۴) ذکر شده‌اند.

۴. معرفی یک برنامه رایانه‌ای برای میانگین‌گیری برداری

در این پژوهش، اقدام به تولید یک برنامه رایانه‌ای با توانایی میانگین‌گیری برداری شد که الگوریتم مورد استفاده در آن الگوریتم میانگین‌گیری برداری است که در بخش قبلی در روابط (۹) تا (۱۲) و در شکل ۴ مطرح شد. برای مقایسه بین میانگین‌گیری برداری و میانگین‌گیری معمولی یا حسابی در ادامه مثالی ارائه می‌شود. در این مثال ۹ جهت توسط یک نرم‌افزار تخمین‌زننده جهت مغناطش کانسارهای زیرزمینی (استخراج شده از حکمتیان (۱۳۹۵) و دارای ثبت اختراع به شماره و تاریخ ۹۴۱۶۱-۱۳۹۶/۰۸/۲۲) برای جهت مغناطیسی یک منبع مصنوعی مغناطیسی تخمین زده شده است. توضیحات کامل در ارتباط با الگوریتم نرم‌افزار تخمین‌زننده مذکور و نحوه تخمین

رخ دهد، البته همیشه هم این طور نمی شود و مثلاً در مثال زیر ۱۸۳ جهت توسط نرم افزار مذکور تخمین زنده جهت مغناطش کانسارهای زیرزمینی برای جهت مغناطیدگی منبع مصنوعی مغناطیسی دیگری تخمین زده شده است. جهت واقعی مغناطیدگی این منبع مصنوعی عبارت است از:

- زاویه میل مغناطیدگی برابر ۱۵ درجه

- زاویه انحراف مغناطیدگی برابر ۱۰- درجه

از جهت شماره ۱۶۲ تا جهت ۱۸۳ تخمین زده شده برای جهت مغناطیدگی منبع مصنوعی مغناطیسی نام برده و مقدار میانگین حسابی کل ۱۸۳ جهت تخمین زده شده در شکل زیر نشان داده شده است (برای جلوگیری از افزایش بی جهت حجم مقاله به جای نمایش تمام ۱۸۳ جهت، فقط تعدادی از جهت های تخمین زده شده نمایش داد شده است):

هریک از جهت های تخمین زده شده و مقدار میانگین حسابی این جهت ها در شکل ۵ با مقدار دو زاویه میل (inclination) و انحراف (declination) بر حسب درجه مشخص شده است. متوسط خطای تخمین جهت نرم افزار تخمین زنده جهت مغناطش نام برده (یعنی خطای تخمین هر یک از جهت های تخمین زده شده قبل از میانگین گیری جهت ها) حدود ۱۰ تا ۲۰ درجه است و می بینیم که مقدار خطای تخمین جهت در این مثال هم در همین حدود است.

همچنین با کمک برنامه رایانه ای تولید شده با توانایی میانگین گیری برداری که به زبان فرترن ۹۰ نوشته شده است، جهت میانگین برداری محاسبه شد. که در این مثال جهت میانگین برداری به دست آمده (از روش برداری)، با جهت میانگین به دست آمده از روش حسابی با هم یکسان بودند. این حالت گاهی ممکن است

162	Es.m.inclination=	11	Es.m.declination=	50
163	Es.m.inclination=	11	Es.m.declination=	51
164	Es.m.inclination=	11	Es.m.declination=	52
165	Es.m.inclination=	11	Es.m.declination=	53
166	Es.m.inclination=	12	Es.m.declination=	-52
167	Es.m.inclination=	12	Es.m.declination=	-51
168	Es.m.inclination=	12	Es.m.declination=	-50
169	Es.m.inclination=	12	Es.m.declination=	-49
170	Es.m.inclination=	12	Es.m.declination=	49
171	Es.m.inclination=	12	Es.m.declination=	50
172	Es.m.inclination=	12	Es.m.declination=	51
173	Es.m.inclination=	12	Es.m.declination=	52
174	Es.m.inclination=	13	Es.m.declination=	-52
175	Es.m.inclination=	13	Es.m.declination=	-51
176	Es.m.inclination=	13	Es.m.declination=	-50
177	Es.m.inclination=	13	Es.m.declination=	-49
178	Es.m.inclination=	14	Es.m.declination=	-52
179	Es.m.inclination=	14	Es.m.declination=	-51
180	Es.m.inclination=	14	Es.m.declination=	-50
181	Es.m.inclination=	14	Es.m.declination=	-49
182	Es.m.inclination=	15	Es.m.declination=	-49
183	Es.m.inclination=	15	Es.m.declination=	-48
184				
185	Average Estimated results are:			
186	Aver.Es.m.inc=	6.26	Aver.Es.m.dec=	4.97

شکل ۶. جهت شماره ۱۶۲ تا جهت ۱۸۳ تخمین زده شده برای جهت مغناطیدگی منبع مصنوعی مغناطیسی نام برده و مقدار میانگین حسابی کل ۱۸۳ جهت تخمین زده شده.

یک موضوع اثبات شده می‌باشد ولی باید توجه کرد که اگر هر یک از اعضای یک جامعه جهتی واقعی نباشند (هر کدام خود یک تخمین از مقدار واقعی جهت باشند) در این صورت میانگین صحیح یک جامعه از اعضای تخمینی نسبت به مقدار واقعی جهت (که با میانگین‌گیری به دنبال یافتن آن هستیم) متفاوت خواهد بود.

در ادامه میانگین‌گیری بر روی ۷ مثال دیگر (به‌طور خلاصه در جداول مربوطه) ذکر می‌شود (هر یک از این مثال‌ها شامل جهت‌های مغناطیدگی تخمین زده شده برای یک منبع مصنوعی مغناطیسی معجزا است و در هر مثال جهت‌های مغناطیدگی (جامعه جهتی) توسط نرم‌افزار تخمین‌زننده جهت مغناطش کانسارهای زیرزمینی استخراج شده از حکمتیان (۱۳۹۵) و دارای ثبت اختراع به شماره و تاریخ ۹۴۱۶۱-۱۳۹۶/۰۸/۲۲ تخمین زده شده است.:

هر دو روش حسابی و برداری هر دو برای میانگین‌گیری استفاده شده است. در جدول (۱) هم جهت واقعی مغناطیدگی هر منبع مصنوعی ذکر شده و هم میانگین حسابی و میانگین جهتی جهات تخمین زده شده برای جهت واقعی، ارائه شده است:

اما جهت میانگین برداری برای ۱۸۳ جهت تخمین زده شده مذکور (که با استفاده از نرم‌افزار تولیدی به دست آمده) عبارت است از:

- زاویه میل مغناطیدگی برابر ۹/۴۳ درجه

- زاویه انحراف مغناطیدگی برابر ۶/۷۱ درجه

که البته میانگین برداری مقدار صحیح میانگین ۱۸۳ جهت تخمین زده شده است. در اینجا باز یاد آوری می‌شود که متوسط خطای تخمین جهت نرم‌افزار تخمین‌زننده جهت مغناطش نام‌برده (یعنی خطای تخمین هر یک از جهت‌های تخمین زده شده قبل از میانگین‌گیری جهت‌ها) حدود ۱۰ تا ۲۰ درجه است که اگر زاویه میل واقعی بین ۲۰- تا ۲۰ درجه باشد خطا می‌تواند از مقدار متوسط هم بیشتر شود. لذا یک عامل اصلی اختلاف بین جهت واقعی مغناطیدگی و هر یک از نتایج میانگین‌گیری حسابی یا برداری، خطای تخمین هر یک از جهت‌های تخمین زده شده (برای جهت واقعی) توسط نرم‌افزار است و ربطی به روش میانگین‌گیری حسابی یا برداری ندارد. البته با توجه به مباحث مطرح شده و بر اساس منابع ذکر شده، اینکه نتیجه میانگین‌گیری برداری به میانگین صحیح یک جامعه جهتی نزدیک‌تر است (نسبت به نتیجه میانگین‌گیری حسابی)،

جدول ۱. جهت واقعی مغناطیدگی ۷ منبع مصنوعی همراه با میانگین حسابی و میانگین جهتی جهات تخمین زده شده برای جهت واقعی.

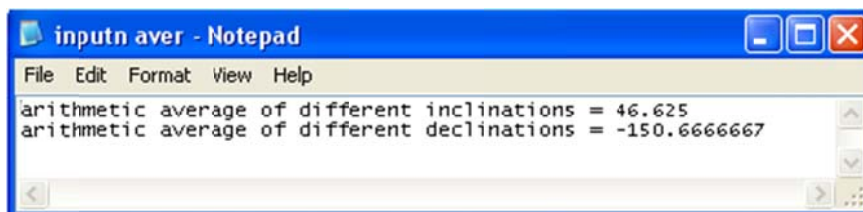
شماره مثال	زاویه میل واقعی (درجه)	زاویه انحراف واقعی (درجه)	زاویه میل محاسباتی بر اساس میانگین‌گیری حسابی (درجه)	زاویه انحراف محاسباتی بر اساس میانگین‌گیری حسابی (درجه)	زاویه میل محاسباتی بر اساس میانگین‌گیری جهتی برداری (درجه)	زاویه انحراف محاسباتی بر اساس میانگین‌گیری جهتی برداری (درجه)
۱	-۴۶	-۳۲	-۴۶	-۳۵	-۴۶	-۳۵
۲	۵۰	۲	۵۳	۰	۵۳	۰
۳	۳۵	-۵۰	۳۰	-۴۹	۳۰	-۴۹
۴	۲۰	-۱۰	۱۰	-۲۵	۱۳	-۳۰
۵	۱۱	-۱۰	۲	-۱۶	۴	-۱۵
۶	۸	-۱۰	۱	-۱۲,۵	۲	-۱۵
۷	۴۲	۳۱	۶	۶۷	۶	۶۸

هدف از ارائه جدول فوق این است که فقط در قالب مثال نشان داده شود که نتایج میانگین‌گیری حسابی و میانگین‌گیری جهتی بر روی جهت‌های مختلف، ممکن است نتایج یکسان نداشته باشد. در استفاده از میانگین‌گیری برداری در حالتی احتیاج به در نظر گرفتن نکته‌ای وجود دارد. این حالت را در قالب مثال‌هایی نشان می‌دهیم. در شکل زیر ۲۴ جهت مختلف دلخواه دیده می‌شود که هر جهت با زاویه میل و انحراف خاص خود در یک سطر نشان داده شده است.

1	inclination=	44	declination=	-145
2	inclination=	45	declination=	-148
3	inclination=	45	declination=	-147
4	inclination=	46	declination=	-151
5	inclination=	46	declination=	-150
6	inclination=	46	declination=	-149
7	inclination=	46	declination=	-145
8	inclination=	46	declination=	-144
9	inclination=	46	declination=	-143
10	inclination=	46	declination=	-142
11	inclination=	47	declination=	-164
12	inclination=	47	declination=	-160
13	inclination=	47	declination=	-156
14	inclination=	47	declination=	-155
15	inclination=	47	declination=	-154
16	inclination=	47	declination=	-148
17	inclination=	47	declination=	-147
18	inclination=	47	declination=	-146
19	inclination=	47	declination=	-145
20	inclination=	48	declination=	-163
21	inclination=	48	declination=	-158
22	inclination=	48	declination=	-153
23	inclination=	48	declination=	-152
24	inclination=	48	declination=	-151
25				

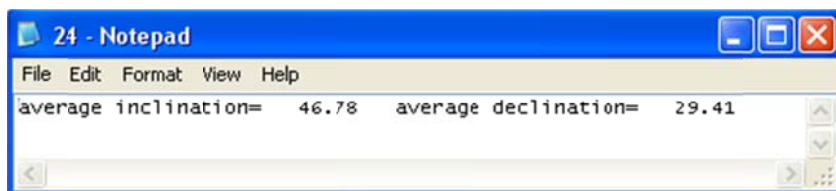
شکل ۷. ۲۴ جهت مختلف که هر جهت با زاویه میل و انحراف خاص خود در یک سطر نشان داده شده است.

میانگین معمولی یا حسابی برای ۲۴ جهت فوق عبارت است از:



شکل ۸. میانگین معمولی یا حسابی برای ۲۴ جهت نشان داده شده در شکل (۷).

اما اگر میانگین برداری این ۲۴ جهت را محاسبه کنیم، نتیجه محاسبه به صورت زیر می‌شود:



شکل ۹. میانگین برداری برای ۲۴ جهت نشان داده شده در شکل (۷).

است و هم زاویه ۱۵۰/۵۹- است ولی نرم‌افزار فقط یک جواب ۲۹/۴۱ را به ما می‌دهد. اما اگر به مقادیر جامعه جهتی و میانگین معمولی یا حسابی آنها توجه کنیم فوراً متوجه می‌شویم که میانگین صحیح ۱۵۰/۵۹- است چرا که به جواب میانگین حسابی نزدیک‌تر است (به مقادیر ۲۴ جهت جامعه مذکور نزدیک‌تر است).

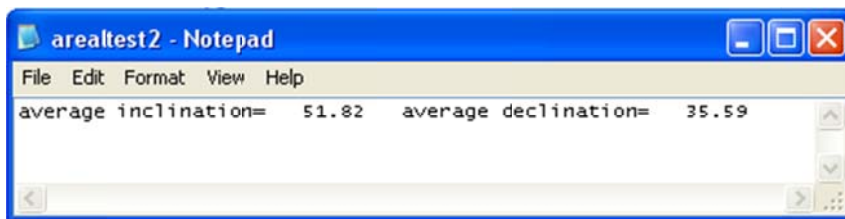
لذا راه برطرف کردن ضعف مذکور در میانگین گیری برداری این است که در کنار آن میانگین گیری معمولی یا حسابی هم صورت بگیرد تا در مواردی مشابه مورد ذکر شده، بتوانیم میانگین برداری صحیح را تشخیص دهیم. در قالب یک مثال دیگر هم این موضوع را نشان می‌دهیم. در شکل زیر ۱۰ جهت مختلف دیده می‌شود که در هر سطر هر جهت با زاویه میل و انحراف مخصوص به خود نشان داده شده و همچنین میانگین حسابی ۱۰ جهت فوق بعد از خود جهت‌ها ارائه شده است.

در اینجا با توجه به شکل‌های ۷ تا ۹ این سوال پیش می‌آید که چطور میانگین زوایای انحراف که حدوداً بین ۱۴۰- تا ۱۶۵- می‌باشد برابر ۲۹/۴۱ درجه شده است؟ جواب این است که همان‌طور که در رابطه (۱۲) بیان شد در میانگین گیری برداری نهایتاً مقدار زاویه میل میانگین I_m و زاویه انحراف میانگین D_m از روابط $D_m = \tan^{-1}(m/l)$ و $I_m = \sin^{-1}(n)$ به دست می‌آیند. حالا اگر $\tan(29.41) = \tan(-150.59)$ را محاسبه کنیم خواهیم دید که جواب هر دو برابر ۰/۵۶ است. به عبارت دیگر تانژانت بعضی از زوایای متفاوت با هم برابرند و لذا اگر تانژانت معکوس (آرک تانژانت) یک مقدار را بگیریم، زوایای متفاوتی می‌توانند جواب باشند ولی در حین محاسبه با نرم‌افزار یا با ماشین حساب فقط یکی از این زوایا به عنوان جواب مطرح می‌شوند. با توجه به آنچه گفته شد تانژانت معکوس مقدار ۰/۵۶ هم زاویه ۲۹/۴۱ درجه

	A	B	C	D
1	Es.m.inclination=	51.00	Es.m.declination=	-138.00
2	Es.m.inclination=	51.00	Es.m.declination=	-137.00
3	Es.m.inclination=	51.00	Es.m.declination=	-136.00
4	Es.m.inclination=	51.00	Es.m.declination=	-135.00
5	Es.m.inclination=	51.00	Es.m.declination=	-134.00
6	Es.m.inclination=	52.00	Es.m.declination=	-155.00
7	Es.m.inclination=	52.00	Es.m.declination=	-154.00
8	Es.m.inclination=	52.00	Es.m.declination=	-153.00
9	Es.m.inclination=	52.00	Es.m.declination=	-152.00
10	Es.m.inclination=	52.00	Es.m.declination=	-151.00
11				
12	Arithmetic average of inclinations	51.50	Arithmetic average of declinations	-144.50
13				

شکل ۱۰. ۱۰ جهت مختلف که هر جهت با زاویه میل و انحراف خاص خود در یک سطر نشان داده شده و همچنین میانگین معمولی یا حسابی برای ۱۰ جهت فوق هم بیان شده است.

اما اگر میانگین برداری این ۱۰ جهت را محاسبه نماییم، جهت زیر به دست می‌آید.

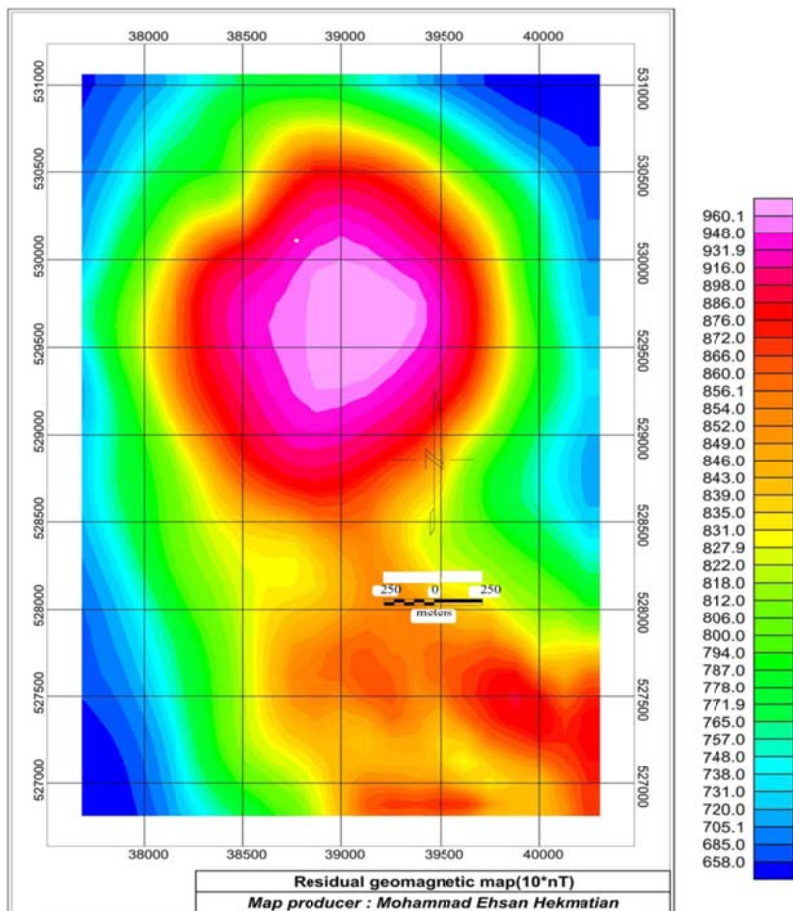


شکل ۱۱. میانگین برداری برای ۱۰ جهت نشان داده شده در شکل (۱۰).

۰/۷۱ هم زاویه ۳۵/۵۹ درجه و هم زاویه ۱۴۴/۴۱- است ولی نرم افزار فقط یک جواب ۳۵/۵۹ را به ما می دهد؛ اما با توجه به مقادیر جامعه جهتی و میانگین معمولی یا حسابی آنها، فوراً درمی یابیم که میانگین صحیح ۱۴۴/۴۱- است چرا که به جواب میانگین حسابی (۱۴۴/۵-) نزدیک تر است (به شکل ۱۰ نگاه کنید).

در ادامه در قالب یک مثال صحرائی هم این موضوع را نشان می دهیم. شکل ۱۲، یک نقشه شدت میدان مغناطیسی باقی مانده در محدوده ای با طول و عرض ۴ و ۲/۵ کیلومتری را نشان می دهد. این محدوده سنگ های آذرین و دگرگونی هستند که با رسوبات عهد حاضر با ضخامت صفر تا حدود ۱۰۰ متر پوشیده شده اند. این داده های مغناطیسی با فاصله های ایستگاهی و بین پروفیلی ۱۲۵ متر برداشت شده اند.

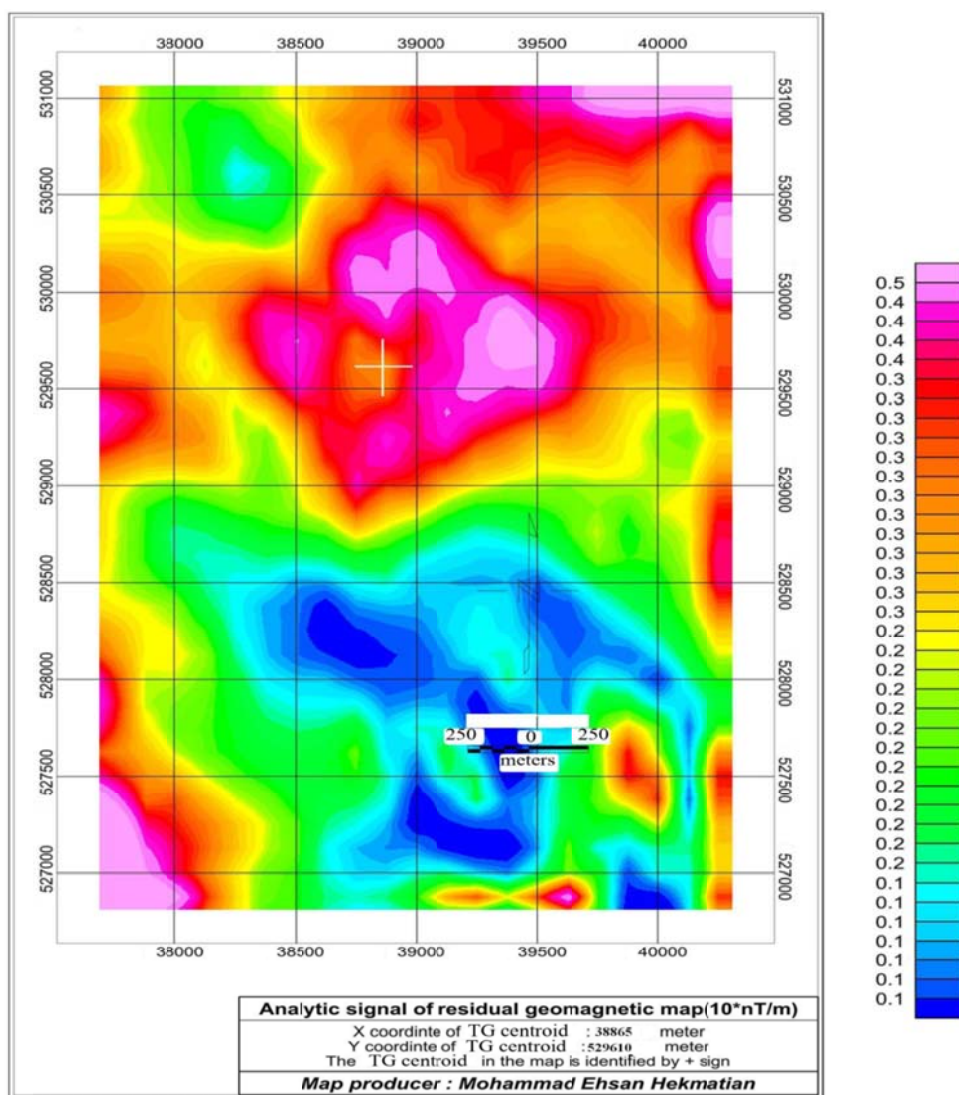
در اینجا با توجه به شکل ۱۱ دیده می شود که میانگین جهتی زوایای انحراف که حدوداً بین ۱۳۸- تا ۱۵۱- می باشد برابر ۳۵/۵۹ درجه شده است و معلوم است که این میانگین صحیح نیست. در اینجا هم برای به دست آوردن میانگین درست برای زوایای انحراف اشاره می شود که همان طور که در رابطه (۱۲) بیان شد در میانگین گیری برداری نهایتاً مقدار زاویه میل میانگین I_m و زاویه انحراف میانگین D_m از روابط $D_m = \tan^{-1}(m/l)$ و $I_m = \sin^{-1}(n)$ به دست می آیند. حالا اگر $\tan(35.59)$ و $\tan(35.59-180) = \tan(-144.41)$ را محاسبه کنیم خواهیم دید که جواب هر دو برابر ۰/۷۱ است. به عبارت دیگر تانژانت معکوس (آرک تانژانت) بعضی از زوایای متفاوت با هم مساوی بوده و لذا زوایای متفاوتی می توانند جواب باشند و با توجه به آنچه گفته شد تانژانت معکوس مقدار



شکل ۱۲. نقشه شدت میدان مغناطیسی باقی مانده در محدوده با مختصات محلی. واحد نقشه 10*nT است به این معنی که مقادیر نشان داده شده در میله رنگ اگر بر ۱۰ تقسیم شوند مقادیر مربوط به هر رنگ نقشه را برحسب nT نشان خواهند داد.

کانسارهای زیرزمینی استخراج شده از حکمتیان (۱۳۹۵) و دارای ثبت اختراع به شماره و تاریخ ۹۴۱۶۱-۱۳۹۶/۰۸/۲۲ مطرح شده است، جهت‌های مغناطیسی مورد قبول به‌عنوان جهت مغناطیسی منبع ناهنجاری (جامعه جهتی مورد قبول) تخمین زده شده است. در الگوریتم مذکور جهت‌های مغناطیسی مورد قبول هستند که هر کدام باعث شوند تا ماکزیمم شبه‌گرانی (در محدوده ناهنجاری) بر مختصات مرکز مذکور (محل علامت + در شکل ۱۳) منطبق شود.

شکل (۱۳)، نقشه سیگنال تحلیلی تهیه شده از نقشه مربوط به شکل ۱۲ است. همان‌طور که در شکل ۱۳ نشان داده شده است، علامت + محل حداقل (نسبی) سیگنال تحلیلی را در بین حداکثرهای نسبی نشان می‌دهد و لذا منبع ناهنجاری احتمالاً به شکل مکعب مستطیلی است که در لبه‌ها به حداقل و در مرکز به حداقل مقدار سیگنال تحلیلی (در محدوده خود) می‌رسد. با استفاده از مختصات مرکز مذکور و با الگوریتمی که در نرم‌افزار تخمین‌زننده جهت مغناطیسی



شکل ۱۳. نقشه سیگنال تحلیلی (Total Gradient (TG)) به‌دست آمده از نقشه مربوط به شکل ۱۲. علامت + محل حداقل (نسبی) سیگنال تحلیلی را در بین حداکثرهای نسبی نشان می‌دهد. واحد نقشه $10 \cdot nT/m$ است به این معنی که مقادیر نشان داده شده در میله رنگ اگر بر ۱۰ تقسیم شوند مقادیر مربوط به هر رنگ نقشه را برحسب nT/m نشان خواهند داد.

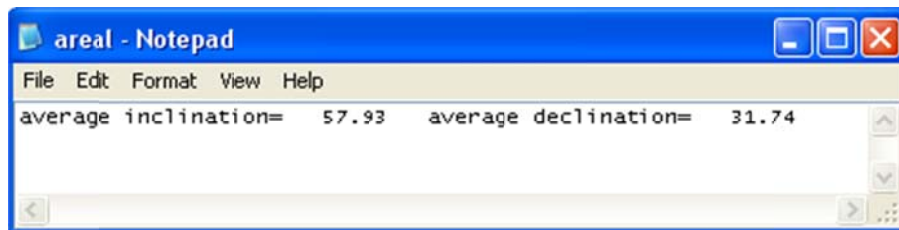
جهت شماره ۶۸۴ تا جهت ۷۰۶ تخمین زده شده برای جهت مغناطیدگی منبع واقعی مغناطیسی نام برده و مقدار میانگین حسابی کل ۷۰۶ جهت تخمین زده شده در شکل زیر نشان داده شده است (برای جلوگیری از افزایش بی مورد صفحات مقاله به جای نمایش تمام ۷۰۶ جهت، فقط تعدادی از جهت‌های تخمین زده شده نمایش داده شده است):

این جامعه جهتی از بین تمام جهات ممکن انتخاب می‌شود و در این مورد شامل ۷۰۶ جهت است (تمام جهات ممکن با اختلاف یک درجه به یک درجه $361 \times 181 = 65341$ جهت می‌باشد. چراکه محدوده تغییرات زاویه میل از -90 تا 90 درجه (۱۸۱ درجه) و محدوده تغییرات زاویه انحراف از -180 تا 180 درجه (۳۶۱ درجه) می‌باشد). در اینجا از

684	Es.m.inclination=	67	Es.m.declination=	-151
685	Es.m.inclination=	67	Es.m.declination=	-150
686	Es.m.inclination=	67	Es.m.declination=	-149
687	Es.m.inclination=	67	Es.m.declination=	-148
688	Es.m.inclination=	68	Es.m.declination=	-157
689	Es.m.inclination=	68	Es.m.declination=	-156
690	Es.m.inclination=	68	Es.m.declination=	-155
691	Es.m.inclination=	68	Es.m.declination=	-154
692	Es.m.inclination=	68	Es.m.declination=	-153
693	Es.m.inclination=	68	Es.m.declination=	-152
694	Es.m.inclination=	68	Es.m.declination=	-151
695	Es.m.inclination=	68	Es.m.declination=	-150
696	Es.m.inclination=	68	Es.m.declination=	-149
697	Es.m.inclination=	68	Es.m.declination=	-148
698	Es.m.inclination=	68	Es.m.declination=	-147
699	Es.m.inclination=	68	Es.m.declination=	-146
700	Es.m.inclination=	69	Es.m.declination=	-150
701	Es.m.inclination=	69	Es.m.declination=	-149
702	Es.m.inclination=	69	Es.m.declination=	-148
703	Es.m.inclination=	69	Es.m.declination=	-147
704	Es.m.inclination=	69	Es.m.declination=	-146
705	Es.m.inclination=	69	Es.m.declination=	-145
706	Es.m.inclination=	69	Es.m.declination=	-144
Arithmetic average of inclinations		57.4	Arithmetic average of inclinations	-148.2

شکل ۱۴. ۷۰۶ جهت مختلف که هر جهت با زاویه میل و انحراف خاص خود در یک سطر نشان داده شده و همچنین میانگین معمولی یا حسابی برای ۷۰۶ جهت فوق هم بیان شده است.

اما اگر میانگین برداری این ۷۰۶ جهت را محاسبه نمایم، جهت زیر به دست می‌آید.



شکل ۱۵. میانگین برداری برای ۷۰۶ جهت نشان داده شده در شکل (۱۴).

تکرار می‌کنیم که میانگین گیری حسابی در مورد جهت‌ها (زوایای میل و انحراف)، در شرایطی ممکن است درست باشد. مثلاً اگر تمام جهت‌ها دارای زاویه میل برابر صفر درجه باشند. اما میانگین گیری حسابی در مورد جهت‌ها، در شرایطی ممکن است کاملاً گمراه کننده باشد. مثلاً اگر تمام جهت‌ها دارای زاویه میل برابر ۸۸ درجه باشند، اختلاف ۱۸۰ درجه‌ای بین زوایای انحراف جهت‌های مختلف، نشانگر اختلاف ۴ درجه‌ای بین آنهاست. لذا در حالت کلی میانگین گیری معمولی (حسابی) در یک جامعه جهتی کار صحیحی نیست و نیازمند میانگین گیری مناسب خاص خود هستیم که همان میانگین گیری برداری است. در این پژوهش یک ضعف در میانگین گیری برداری مشخص شد و آن این است که نتیجه میانگین گیری برداری گاهی به جای یک نتیجه چند نتیجه متفاوت است. در مواردی که میانگین گیری برداری به چند نتیجه متفاوت می‌رسد، لازم است که در کنار آن میانگین گیری معمولی یا حسابی هم صورت بگیرد تا بتوانیم میانگین برداری صحیح را تشخیص دهیم و آن میانگین برداری درست است که به میانگین حسابی نزدیک تر باشد.

مراجع

حکمتیان، م.ا.، ۱۳۹۵، طراحی و تولید نرم‌افزار با توانایی تخمین جهت مغناطیدی با زماند با استفاده از روش‌های شبه گرانی و سیگنال تحلیلی، گزارش پژوهشی درون پژوهشگاهی، پژوهشی مواد اولیه و فناوری سوخت، پژوهشکده مواد و سوخت هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای.

حکمتیان، م.ا.، ۱۳۹۷، بیان تحلیلی آمار پالئومغناطیسی و تولید یک برنامه رایانه‌ای کوچک با توان میانگین گیری برداری، گزارش علمی و فنی، گروه پژوهشی مواد اولیه و فناوری سوخت، پژوهشکده مواد و سوخت هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای.

در اینجا با توجه به شکل ۱۵ دیده می‌شود که میانگین برداری زوایای انحراف که حدوداً بین ۱۳۰ تا ۱۷۰- می‌باشد برابر ۳۱/۷۴ درجه شده است و معلوم است که این میانگین صحیح نیست. در اینجا هم باز اشاره می‌شود که در میانگین گیری برداری نهایتاً مقدار زاویه میل میانگین I_m و زاویه انحراف میانگین D_m از روابط $D_m = \tan^{-1}(m/l)$ و $I_m = \sin^{-1}(n)$ به دست می‌آیند. حالا اگر $\tan(31.74) = \tan(-148.26)$ و $\tan(31.74-180) = \tan(-148.26)$ را محاسبه کنیم، خواهیم دید که جواب هر دو برابر ۰/۶۲ است. یعنی تانژانت معکوس دو زاویه با هم مساوی است. به عبارت دیگر تانژانت معکوس مقدار ۰/۶۲ هم زاویه ۳۱/۷۴ درجه و هم زاویه ۱۴۸/۲۶- است. در این شرایط اگر به مقادیر جامعه جهتی و میانگین معمولی یا حسابی آنها توجه کنیم فوراً متوجه می‌شویم که میانگین صحیح ۱۴۸/۲۶- است چرا که به جواب میانگین حسابی (۱۴۸/۲-) نزدیک تر است (به شکل ۱۴ نگاه کنید).

۵. نتیجه گیری

همان‌طور که به تفصیل بحث کردیم، اگر جامعه آماری از تعدادی جهت دلخواه فضایی تشکیل شده باشد، وضعیت عادی یا نرمال حاکم نمی‌باشد. در این شرایط از تابع چگالی احتمال فیشر و میانگین گیری برداری می‌توان بهره برد. هدف اولیه انجام این پژوهش بهینه سازی میانگین گیری نتایج تخمین مغناطش نرم‌افزار تخمین‌زننده جهت مغناطش کانسارهای زیرزمینی با تولید برنامه رایانه‌ای با توانایی میانگین گیری برداری بوده است ولی مبحث میانگین گیری برداری برای بررسی صحیح تر تمام مجموعه داده‌های برداری (در تمام رشته‌های علمی دیگر هم) مفید است و در واقع از این پژوهش و نتایج آن می‌توان در سایر فعالیت‌های پژوهشی یا اجرایی که درگیر کار با جوامع آماری جهتی هستند استفاده کرد. در اینجا برای تأکید همان‌طور که در مقدمه بیان کردیم دوباره

- Beiki, M., Clark, D. A., Austin, J. and Foss, C., 2012, Estimating source location using normalized magnetic source strength calculated from magnetic gradient tensor data, *Geophysics*, 77(6), J23-J37.
- Butler, R. F., 2004, *Paleomagnetism: Magnetic domains to geologic terranes*, Electronic edition, University of Portland, Portland, Oregon.
- Bott, M. H. P., Smith, R. A. and Stacey, R. A., 1966, Estimation of the direction of magnetization of a body causing a magnetic anomaly using a pseudo-gravity transformation, *Geophysics*, 31, 803–811. doi:10.1190/1.1439812
- Clark, D. A., 2012, New methods for interpretation of magnetic vector and gradient tensor data I: eigenvector analysis and the normalised source strength, *Exploration Geophysics*, 43, 267–282. doi:10.1071/EG12020
- Clark, D. A., 2013, New approaches to dealing with remanence: magnetic moment analysis using tensor invariants and remote determination of in situ magnetisation using a static tensor gradiometer, ASEG-PESA Conference, Melbourne, Extended Abstract, 1–7.
- Clark, D. A., 2014, Methods for determining remanent and total magnetisations of magnetic sources – a review, *Exploration Geophysics*, 45, 271–304. doi:10.1071/EG14013.
- Dannemiller, N. and Li, Y., 2006, A new method for determination of magnetization direction, *Geophysics*, 71, L69–L73. doi:10.1190/1.2356116.
- Fedi, M., Florio, G. and Rapolla, A., 1994, A method to estimate the total magnetization direction from a distortion analysis of magnetic anomalies, *Geophysical Prospecting*, 42, 261–274. doi:10.1111/j.1365-2478.1994.tb00209.x.
- Fisher, R. A., 1935, *Design of Experiments*. Oliver and Boyd, Edinburgh.
- Gerovska, D., Araúzo-Bravo, M. J. and Stavrev, P., 2009, Estimating the magnetization direction of sources from southeast Bulgaria through correlation between reduced-to-the-pole and total magnitude Anomalies, *Geophysical Prospecting*, 57, 491–505. doi:10.1111/j.1365-2478.2008.00761.x
- Hekmatian, M. E., 2019, Estimating the direction of source magnetisation through comparison of pseudogravity and total gradient, *Exploration Geophysics*, accepted in 2019.
- McKenzie, B., Foss, C. and Hillan, D., 2012, An improved search for magnetization direction, 22nd ASEG Geophysical Conference, Extended Abstracts, 1–4.
- Pilkington, M. and Beiki, M., 2013, Mitigating remanent magnetization effects in magnetic data using the normalized source strength, *Geophysics*, 78(3), J25–J32.
- Roest, W. R. and Pilkington, M., 1993, Identifying remanent magnetization effects in magnetic data, *Geophysics*, 58, 653–659. doi:10.1190/1.1443449.
- Schnetzler, C. C. and Taylor, P. T., 1984, Evaluation of an observational method for estimation of remanent magnetization, *Geophysics*, 49, 282–290. doi:10.1190/1.1441660.
- Stavrev, P. and Gerovska, D., 2000, Magnetic field transforms with low sensitivity to the direction of source magnetization and high centrality, *Geophysical Prospecting*, 48, 317–340. doi:10.1046/j.1365-2478.2000.00188.x.
- Zhang, H., Ravat, D., Marangoni, Y. R., Chen, G. and Hu, X., 2018, Improved total magnetization direction determination by correlation of the normalized source strength derivative and the reduced-to-pole fields, *Geophysics*, 83(6), J75–J85. <https://doi.org/10.1190/geo2017-0178.1>.

Detection of the weakness of the vector averaging of magnetization data and a method for treatment of the weakness

Hekmatian, M. E.*

Assistant Professor, Materials and Nuclear Fuel Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute (NSTRI), Atomic Energy Organization of Iran (AEOI), Tehran, Iran

(Received: 20 Aug 2018, Accepted: 14 May 2019)

Summary

In statistical common population, common or normal distribution is often governed and so that using Gaussian or normal probability density function and arithmetic averaging is appropriate. But if the statistical population has been formed from a number of spatial arbitrary directions, then common or normal distribution is not governed. In this condition Fisher probability density function and vector averaging can be used (Fisher is the name of the scientist who proposed the mentioned density function for the first time). In this function, each direction is shown as a point on a sphere with unit radius. The mentioned function shows the probability of having a particular direction in unit angular area of a particular area that has a definite central direction. This central direction shows the angular difference with the real average direction. In Fisher function, the distribution of the azimuth angles around the real vector average direction is symmetrical. The azimuth and the declination angles are the same and being symmetrical around the their distribution of the real average direction is logical. One of the statistical directional populations is the statistical population of different directions of the magnetization of rocks (Each magnetization direction is specified by two angles. First the angle between the magnetization direction and the surface of the horizon (inclination angle) and second the angle between the magnetization direction projection on the surface of the horizon and the geographic north direction (declination angle)). In this paper after an introduction, both normal and Fisher distributions (the latter is used for directional population) are discussed for better understanding of the difference between normal and directional statistical populations. Then the algorithm for calculating the vector averaging is presented. After that a software having vector averaging ability that is produced in this research is presented and then the vector and arithmetic averages are compared for magnetization data. During this research, it is clear that there is a weakness in the vector averaging and that weakness is that in some conditions the result of the vector averaging is not unique (this non uniqueness is because of the functions used in vector averaging algorithm). For example for calculating the declination angle, the function arc-tangent is used and we know that the result of this function is not unique. For example $\arctan(0.5637)$ is equal to both 29.41 and -150.9 degrees). The proposed method for the treatment of this weakness in this research is that, it would be proper to perform an arithmetic averaging beside the vector averaging and by which in the cases of having non unique results for vector averaging, the true result can be detectable (The result of the arithmetic averaging is unique) Between different results of the vector averaging, that result is true which is more similar to the arithmetic averaging. For example if there is a directional population which their declination angles are between -170 to -140 degrees and their arithmetic average is -150.67 degrees and the results of their vector averaging are 29.41 and -150.59 degrees, then the correct vector average is -150.59.

Keywords: vector averaging, arithmetic averaging, directions of magnetizations.

*Corresponding author:

mohekmatian@yahoo.com