فیزیک زمین و فضا، دوره ۴۷، شماره ۱، بهار ۱۴۰۰، صفحهٔ ۷۷- ۹۰ (مقاله پژوهشی)   **DOI:** 10.22059/jesphys.2021.287486.1007153

حل تحلیلی معادله دو بعدی و غیرماندگار انتقال آلودگی به‌ازای شرط اولیه و منابع آلاینده دلخواه در مجاری روباز

ندا مشهدگرمه[۱]، مهدی مظاهری[۲*] و جمال محمد ولی سامانی[۳]

۱. دانشجوی دکتری، گروه سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
۲. استادیار، گروه سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
۳. استاد، گروه سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

(دریافت: ۹۸/۶/۳، پذیرش نهایی: ۹۹/۱۱/۵)

چکیده

انتشار آلودگی در منابع آب‌های سطحی و زیرزمینی یکی از مهم‌ترین مشکلات زیست‌محیطی در دنیای امروز است. در این راستا حل‌های تحلیلی نقش مهمی در درک بهتر مسأله انتقال آلودگی، تخمین پارامترهای فرایند انتقال آلاینده و صحت‌سنجی حل‌های عددی ایفا می‌کنند. در این تحقیق حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی در حالت دو بعدی به‌ازای شرط اولیه کلی و نیز به‌ازای منابع فعال آلاینده نقطه‌ای با الگوهای زمانی دلخواه در دامنه محدود در مجاری روباز با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته به‌دست آمده است. به‌منظور ارزیابی عملکرد حل تحلیلی استخراج شده، نتایج حاصله از حل تحلیلی پیشنهادی با حل تحلیلی با استفاده از روش تابع گرین در قالب دو مثال فرضی مجزا مقایسه شد. در مثال فرضی اول، شرط اولیه به‌صورت تخلیه ناگهانی جرم ماده خشک در یک نقطه معین و عبارت منبع به‌صورت یک منبع آلاینده نقطه‌ای فعال با الگوی زمانی به‌صورت یک تابع نمایی در نظر گرفته شد. در مثال دوم، شرط اولیه مشابه با مثال اول و عبارت منبع به‌صورت دو منبع آلاینده نقطه‌ای فعال با الگوهای زمانی نامنظم لحاظ شد. کانتورهای غلظت حاصله در هر دو مثال، انطباق حل تحلیلی پیشنهادی با حل تحلیلی با استفاده از روش تابع گرین را نشان می‌دهد. همچنین شاخص‌های آماری ضریب همبستگی (R^2) و میانگین خطای نسبی (Mean Relative Error ،MRE) نیز کمتر از ۰/۵ درصد به‌دست آمد که عملکرد مطلوب حل تحلیلی پیشنهادی را گزارش می‌دهد. حل تحلیلی پیشنهادی قابلیت اتخاذ شرط اولیه دلخواه و نیز منابع آلاینده متعدد با الگوهای زمانی دلخواه را دارا بوده و می‌تواند به‌عنوان یک راه‌حل مبنا در صحت‌سنجی حل‌های عددی مورد استفاده قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: معادله انتقال آلودگی، شرط اولیه، منابع آلاینده نقطه‌ای، الگوهای زمانی دلخواه، روش تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته، دامنه محدود.

۱. مقدمه

منابع آبی موجود در سطح زمین عمدتاً از آب‌های سطحی و زیرزمینی تشکیل شده است. این منابع در معرض آلودگی توسط طیف گسترده‌ای از منابع آلاینده قرار دارند. به‌منظور پیش‌بینی نحوه توزیع زمانی و مکانی غلظت مواد آلاینده در مجاری روباز بایستی معادلات دیفرانسیل جریان و انتقال حل شوند. حل این معادلات تحت شرایطی که فرضیات ساده کننده در معادلات اعمال شود به‌صورت تحلیلی امکان‌پذیر خواهد بود. مدل‌های تحلیلی ابزارهای بسیار با ارزشی به‌منظور صحت‌سنجی مدل‌های عددی، تعیین پارامترهای مؤثر بر فرایند انتقال آلاینده، درک روشن‌تر از شرایط فیزیکی مسأله و بررسی دقیق نحوه انتقال املاح در محیط متخلخل و یا جریانات سطحی هستند. اما به‌دلیل پیچیدگی رفتار واقعی یک سیستم در طبیعت و ورود پارامترهای بسیار زیادی که در حل مسأله دخیل هستند، ارائه یک راه‌حل تحلیلی بسیار پیچیده و دشوار است. راه‌حل‌های تحلیلی معادلات دیفرانسیل مورد توجه بسیاری از زمینه‌های مهندسی از جمله انتقال جرم، انتقال گرما و نیز پراکندگی آلاینده‌ها در هوا، خاک و آب است.

معادله حاکم بر انتقال آلودگی در مجاری روباز، معادله جابه‌جایی- پراکندگی- واکنش (ADRE،

*نگارنده رابط: m.mazaheri@modares.ac.ir

(Advection-Dispersion-Reaction Equation می‌باشد. فرم کلی معادله ADRE در حالت دو بعدی و غیرماندگار، با فرض آن‌که آلاینده در معرض سه پدیده جابه‌جایی، پراکندگی و واکنش قرار دارد و با لحاظ عبارت منبع به‌صورت رابطه ۱ است (چیرا، ۱۹۹۷):

$$\frac{\partial(hc)}{\partial t}=-\frac{\partial(huc)}{\partial x}-\frac{\partial(hvc)}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(hD_x\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(hD_y\frac{\partial c}{\partial y}\right)-khc\pm h\varphi(x,y,t) \quad (۱)$$

که در رابطه فوق t زمان، x و y مؤلفه‌های مکانی در امتداد طول و عرض کانال، u و v به‌ترتیب مؤلفه‌های سرعت در جهت طولی و عرضی (m/s)، D_x و D_y به‌ترتیب ضریب پراکندگی طولی (m^2/s)، k ثابت نرخ واکنش (s^{-1})، h عمق جریان (m) و $c=c(x,y,t)$ تابع غلظت (kg/m^3) و $\varphi(x,\mathrm{y},t)$ عبارت از چشمه (Source) یا چاهک (Sink) می‌باشد.

تاکنون روش‌های متفاوتی برای حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی توسط محققین اتخاذ شده که از مهم‌ترین آن می‌توان به روش تابع گرین (GFM، Green's Function Method)، روش تبدیل‌های انتگرالی (ITT، Integral Transform Technique) و روش تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته (GITT، Generalized Integral Transform Technique) اشاره کرد. آرال و لیا (۱۹۹۶) حل تحلیلی صورت دو بعدی معادله آلودگی را به‌ازای عبارت منبع به‌صورت ناگهانی و پیوسته در دامنه نامحدود در محیط متخلخل، با استفاده از اصل برهم‌نهی به‌دست آوردند. آنها شرط اولیه را به‌صورت منبع آلاینده نقطه‌ای با جرم مشخص و منبع آلاینده خطی با غلظت مشخص در نظر گرفتند. یه (۱۹۸۱) با استفاده از روش تابع گرین حل تحلیلی معادله آلودگی را در حالات یک، دو و سه بعدی برای انواع ترکیبات متفاوت شرایط مرزی با الگوهای ناگهانی، پیوسته و پله‌ای استخراج کرد. همچنین عبارت منبع را به‌صورت نقطه‌ای، خطی، صفحه‌ای و حجمی لحاظ کرد. باشا (۱۹۹۷) با استفاده از ترکیب روش تابع گرین و روش تصویری حل تحلیلی فرم یک، دو و سه بعدی معادله انتقال آلودگی را در یک کانال روباز با لحاظ عبارت منبع به‌صورت منابع آلاینده خطی و صفحه‌ای با الگوی بارگذاری ناگهانی و نیز منبع آلاینده خطی با الگوی تخلیه پیوسته با زمان به‌دست آوردند. زوپوئو و نایت (۱۹۹۹) حل تحلیلی فرم دو بعدی و سه بعدی معادله ADRE آلودگی را به‌ازای شرط اولیه به‌صورت تابع مکانی ناگهانی و منابع آلاینده نقطه‌ای و خطی با الگوی بارگذاری ناگهانی در حالت غیرماندگار و ماندگار به‌دست آوردند. ورتمن و همکاران (۲۰۰۵) حل تحلیلی معادله فرم دو بعدی و ماندگار انتقال آلودگی را با استفاده از تکنیک GITT به‌دست آوردند. آنها در این تحقیق عبارت منبع را صفر فرض کردند. همچنین شرط مرزی ورودی را شرط نوع اول با یک غلظت ثابت در نظر گرفتند. کاستا و همکاران (۲۰۰۶) حل تحلیلی فرم سه بعدی معادله انتقال آلودگی در جو را با استفاده از ترکیب تبدیل لاپلاس و تکنیک GITT تعیین کردند. آنها در این تحقیق سرعت و ضریب پراکندگی را ثابت و عبارت منبع را صفر در نظر گرفتند. دیباروس و همکاران (۲۰۰۶) و دیباروس و کوتا (۲۰۰۷) فرم ماندگار و غیرماندگار معادله جابه‌جایی پراکندگی را در کانال‌های روباز، با استفاده از روش GITT حل کردند. آنها عبارت منبع در هر دو تحقیق را برابر صفر و شرایط مرزی در تمام قسمت‌ها را از نوع گرادیان صفر در نظر گرفتند. دآلمدیا و همکاران (۲۰۰۸) به‌منظور بررسی دقیق نحوه انتشار آلودگی در جو، حل تحلیلی فرم غیرماندگار معادله انتقال آلودگی را با استفاده از روش GITT به‌دست آوردند. محققین در این تحقیق عبارت منبع را برابر صفر فرض کرده و شرط مرزی را به‌صورت تابع غلظت با الگوی زمانی ناگهانی در نظر گرفتند. کاسول و همکاران (۲۰۰۹) یک حل تحلیلی برای مسأله دو بعدی

غیرماندگار انتشار آلودگی در جو، با استفاده از ترکیبی از دو روش GITT و تبدیل لاپلاس ارائه دادند. آنها در این تحقیق عبارت منبع را صفر فرض کرده و غلظت ورودی به جو را از طریق یک منبع آلاینده ناگهانی ورودی از مرز در نظر گرفتند. گوئررو و همکاران (۲۰۰۹)، با استفاده از تغییر متغیر و تکنیک GITT، حل تحلیلی فرم سه‌بعدی معادله انتقال آلودگی را در حالت ماندگار و غیرماندگار به‌دست آوردند. آنها به‌منظور ارزیابی حل، در قالب دو مثال حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی را در حالت یک‌بعدی ماندگار و غیرماندگار با لحاظ عبارت منبع برابر صفر، تعیین کردند. چن و همکاران (۲۰۱۱) حل تحلیلی فرم دو بعدی معادله انتقال آلودگی در سیستم مختصات استوانه‌ای و در دامنه دو بعدی را با استفاده از ترکیب تبدیل هنکل محدود و تکنیک GITT به‌دست آوردند. شرط مرزی بالادست از نوع اول و نوع سوم و عبارت منبع برابر صفر در نظر گرفته شد. یاداو و جیسوال (۲۰۱۲) حل تحلیلی فرم دو بعدی معادله انتقال آلودگی در حالت دو بعدی در دامنه محدود و محیط ایزوتروپ با جریان غیرماندگار و ضرایب متغیر زمانی به‌صورت یک تابع زمانی سینوسی را با استفاده از تبدیل لاپلاس تعیین کردند. شرط اولیه در این تحقیق به‌صورت یک تابع مکانی نمایی افزایشی و عبارت منبع به‌صورت یک مقدار ثابت با الگوی زمانی سینوسی لحاظ شد. ون‌گناختن و همکاران (۲۰۱۳) حل معادله انتقال آلودگی را در حالت یک، دو و سه بعدی در دامنه محدود و نیمه‌محدود در مجاری روباز به‌ازای غلظت ورودی از مرز بالادست با الگوهای زمانی پیوسته، پله‌ای و نمایی و عبارت منبع با مقدار ثابت با استفاده از تبدیل لاپلاس استخراج کردند. چن و همکاران (۲۰۱۶) یک روش کلی برای توسعه حل‌های تحلیلی جدید معادله ADRE در حالت‌های یک، دو و سه بعدی با در نظر گرفتن انواع منابع آلاینده با هندسه‌های مشخص نظیر منابع آلاینده خطی نامنظم، منابع سطحی عمودی و افقی و دایره‌ای و منابع آلاینده حجمی با الگوهای زمانی ناگهانی و پیوسته معرفی کردند. مشهدگرمه و همکاران (۲۰۱۷) حل تحلیلی فرم غیرماندگار معادله انتقال آلودگی در حالت یک‌بعدی و دو بعدی با ضرایب ثابت را به‌ازای فعالیت چندین منبع آلاینده نقطه‌ای با استفاده از روش تابع گرین به‌دست آوردند. آنها در این تحقیق حل تحلیلی معادله ADRE را با در نظر گرفتن چندین منبع آلاینده نقطه‌ای با الگوهای زمانی نامنظم تعیین کردند. سانسکریتیاین و همکاران (۲۰۱۸) حل تحلیلی صورت دو بعدی معادله ADRE در دامنه نامحدود در محیط متخلخل را با در نظر گرفتن عبارت منبع به‌صورت منابع آلاینده نقطه‌ای با الگوهای زمانی ناگهانی و پیوسته را با روش تابع گرین تعیین کردند. یاداو و کومار (۲۰۱۹) حل تحلیلی فرم دو بعدی معادله انتقال آلودگی را در دامنه نیمه‌محدود به‌ازای شرط مرزی ورودی نوع یک با الگوی پله‌ای و با لحاظ شرط اولیه و منبع آلاینده خارجی برابر مقدار ثابت با استفاده از تبدیل لاپلاس تعیین کردند.

دراکثر تحقیقات مرتبط با استخراج حل تحلیلی، فرم یک‌بعدی معادله انتقال آلودگی در شرایط ساده و در محیط متخلخل انجام شده است. تحقیقات کمی در رابطه با حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی در حالت‌های چند بعدی انجام شده که در آنها ترم جابه‌جایی یا حذف شده و یا تنها در یک جهت در نظر گرفته شده و اکثر آنها نیز در محیط متخلخل انجام شده است. همچنین در اکثر آنها شرط اولیه برابر با صفر یا مقدار ثابت در نظر گرفته شده است. به علاوه عبارت منبع نیز در تحقیقات مذکور برابر با صفر و یا فقط شامل یک آلاینده با الگوی زمانی ساده نظیر الگوی زمانی ثابت در نظر گرفته می‌شود. لازم به‌ذکر است که حل تحلیلی در دامنه محدود به‌خصوص در حالت دو بعدی بسیار پیچیده‌تر از دامنه‌های نیمه‌محدود و نامحدود می‌باشد. در تحقیق حاضر، حل تحلیلی فرم کلی و غیرمانا معادله ADRE با لحاظ کردن جمله‌های واکنش،

جابه‌جایی، پراکندگی در جهات طولی و عرضی و عبارت منبع به‌صورت تابع مکانی و زمانی در حالت دو بعدی در مجاری روباز با دامنه محدود با استفاده از تکنیک انتگرالی تعمیم‌یافته (GITT) تعیین شده است. در این راستا شرط اولیه مسأله به‌صورت کلی (هرتابع مکانی دلخواه) و عبارت منبع به‌صورت منابع آلاینده نقطه‌ای متعدد با الگوهای زمانی تخلیه به‌صورت دلخواه درنظر گرفته شده است.

لذا ارائه حل تحلیلی فرم غیرمانا معادله انتقال آلودگی با لحاظ تمام جمله‌های معادله در جهات طولی و عرضی در حالت دو بعدی در مجاری روباز برای مواردی که همزمان شرط اولیه به‌صورت تابع دلخواه بوده و نیز چندین منابع آلاینده نقطه‌ای با الگوهای بارگذاری نامنظم در دامنه فعالیت می‌کنند به‌عنوان مهم‌ترین نوآوری این تحقیق به شمار می‌آید. همچنین محدود بودن دامنه حل در جهات طولی و عرضی، نوآوری دیگر این تحقیق می‌باشد. حل تحلیلی ارائه شده در این تحقیق یکی از جامع‌ترین حل‌های تحلیلی ارائه شده می‌باشد. در این تحقیق فرضیات در نظر گرفته شده برای استخراج حل، به کاربرد نزدیک‌تر بوده و به‌منظور استخراج حل در چنین حالت پیچیده‌ای از یک روش نوین به نام GITT در استخراج حل تحلیلی استفاده شده است. سابقاً در چنین مسائل پیچیده‌ای به‌منظور تعیین تابع توزیع غلظت از مدل‌های عددی استفاده می‌شد. لذا استخراج حل تحلیلی در چنین شرایطی بسیار با ارزش بوده و می‌تواند مبنای صحت‌سنجی مدل‌های عددی قرار گرفته و حتی در بسیاری از موارد جایگزین حل عددی با صرف هزینه محاسباتی کمتر و دقت بالا باشد.

۲. روش پژوهش

در این قسمت در ابتدا تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته معرفی شده سپس شرح کامل مراحل استخراج حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی در حالت دو بعدی در دامنه محدود به‌ازای شرط اولیه و فعالیت منابع آلاینده نقطه‌ای، با استفاده از تکنیک مذکور ارائه می‌شود.

۲-۱. معرفی تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته (GITT)

روش GITT یک روش بسیار قوی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی غیرهمگن است. توانایی این روش در پیچیده در نظر گرفتن معادله دیفرانسیل جزئی، شرایط مرزی و اولیه، دامنه حل و توانایی اعمال منابع آلاینده متنوع آلودگی و قابلیت کنترل خطا توسط کاربر از جمله مزایای این روش نسبت به سایر روش‌های تحلیلی می‌باشد. عملکرد محاسباتی بسیار خوبی در حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل جزئی ناهمگن نظیر معادله انتقال جرم، از خود نشان می‌دهد (کوتا و میخایلو، ۱۹۹۷). اساس روش GITT بر توابع‌ویژه حاصله از مسأله مقدارویژه کمکی مناسب استوار است. در این روش معادله دیفرانسیل جزئی اصلی به یک سیستم نامتناهی از معادلات دیفرانسیل معمولی (Ordinary Differential Equation ،ODE) تبدیل می‌شود که حل آنها نسبت به حل معادله دیفرانسیل ناهمگن اولیه ساده‌تر است. گام‌های اصلی در اعمال روش GITT به شرح زیر است (کوتا و میخایلو، ۱۹۹۷؛ کوتا و همکاران، ۲۰۱۶):

- تعیین مسأله مقدارویژه مناسب به‌عنوان مسأله کمکی به‌منظور استخراج توابع‌ویژه مناسب
- معرفی تبدیل انتگرالی مستقیم و تبدیل معکوس
- اعمال تبدیل‌های مستقیم (Forward transform) و معکوس (Inverse transform) بر معادله دیفرانسیل به‌دست آمده از مرحله اول و بهره‌گیری از خاصیت تعامد (Orthogonality) توابع‌ویژه و نرم (Norm) توابع
- تشکیل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی نهایی و حل آن

- تعیین پاسخ مسأله اصلی با استفاده از تبدیل معکوس
در ادامه مراحل روش GITT به‌منظور استخراج حل تحلیلی معادله ADRE در حالت دو بعدی در مجاری روباز به‌ازای شرط اولیه کلی و فعالیت همزمان چندین منبع آلاینده نقطه‌ای با الگوهای زمانی دلخواه، به تفصیل توضیح داده خواهد شد.

۲-۲. حل تحلیلی معادله ADRE با لحاظ شرط اولیه و منابع آلاینده نقطه‌ای با الگوهای زمانی دلخواه

همان‌طور که قبلاً ذکر شد حل‌های تحلیلی مبتنی بر فرضیات ساده کننده هستند. زیرا استخراج حل تحلیلی برای یک حالت واقعی در طبیعت تقریباً غیرممکن است. هر چه فرضیات ساده کننده به‌منظور استخراج حل کمتر باشد، مسأله به شرایط واقعی و کاربردی نزدیک‌تر می‌شود. اما به‌تبع روش‌های ریاضی پیچیده‌تری برای استخراج حل لازم خواهد بود. به‌منظور استخراج حل معادله انتقال آلودگی در این تحقیق، فرضیات زیر لحاظ شده‌اند:

- فرم غیرماندگار معادله انتقال آلودگی در حالت دوبعدی لحاظ شده است.
- عبارت‌های مربوط به پدیده‌های جابه‌جایی و پراکندگی هم در جهت طولی و هم در جهت عرضی لحاظ شده است.
- جریان یکنواخت و ماندگار بوده و استخراج حل در یک دامنه مستطیلی (محدود) مد نظر قرار دارد.
- مقدار غلظت ورودی به دامنه از تمامی مرزها برابر صفر است.
- مقدار غلظت موجود در دامنه در زمان صفر (شرط اولیه) به‌صورت تابع مکانی دلخواه است.
- عبارت منبع در معادله انتقال آلودگی از نظر تعداد، موقعیت مکانی و الگوی زمانی تخلیه کاملا دلخواه می‌باشد.

در حالت کلی، منبع آلاینده نقطه‌ای منبعی است که مساحت آن (مساحتی که تخلیه از آن صورت می‌گیرد) در مقایسه با مساحت محیطی که منبع در آن تخلیه می‌شود، بسیار ناچیز باشد. به‌طوری‌که بتوان آن را به‌صورت یک نقطه در نظر گرفت (چپرا، ۱۹۹۷). فرم کلی معادله انتقال آلودگی با فرض ثابت بودن ضرایب و منابع آلاینده نقطه‌ای متعدد (به تعداد n_s) با الگوهای زمانی دلخواه در یک دامنه مستطیلی به طول L و عرض W به‌صورت رابطه ۲ است:

$$\frac{\partial c}{\partial t}=-u\frac{\partial c}{\partial x}-v\frac{\partial c}{\partial y}+D_x\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}-kc+\frac{1}{h}\sum_{l=1}^{ns}W_l(\mathrm{t})\delta(x-x_{s_l})\delta(y-y_{s_l}) \tag{۲}$$

که در رابطه ۲، $W_l(t)$ مقدار جرم آلاینده در واحد زمان (kg/s)، h عمق کانال (m)، x_{s_l} و y_{s_l} موقعیت مکانی منابع آلاینده نقطه‌ای در دامنه و عبارت $\delta(.)$ تابع دلتای دیراک می‌باشد. شرط اولیه و شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای معادله ۲ عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}&IC:\ c(x,y,0)=f(x,y)\\&BC:\begin{cases}0\le x\le L\\0\le y\le W\end{cases}\Rightarrow\quad c(0,y,t)=0,\\&\left.\frac{\partial c(x,y,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\quad\left.\frac{\partial c(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\quad\left.\frac{\partial c(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=W}=0\end{aligned} \tag{۳}$$

اولین گام برای حل معادله انتقال آلودگی در حالت دو بعدی در این تحقیق، معرفی یک مسأله مقدارویژه مشخص و تعیین مقادیر ویژه، توابع‌ویژه و نرم آنها است. انتخاب مسأله مقدارویژه مهم‌ترین مرحله در حل معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از روش GITT است که با حل آن مقادیر ویژه و توابع‌ویژه مناسب استخراج شده و بر اساس آن تبدیل‌های مستقیم و معکوس مربوط به روش GITT تعریف می‌شود. در واقع حل تحلیلی نهایی در روش GITT به‌صورت بسط تابع‌ویژه حاصله از مسأله مقدارویژه متناسب با مسأله اصلی است (کوتا و میخایلو، ۱۹۹۷). مسأله مقدارویژه بایستی حداکثر اطلاعات مربوط به رفتار متغیرهای مکانی و اپراتورهای مکانی مسأله اصلی

را در بر داشته و شامل اطلاعاتی در مورد محیط مورد مطالعه باشد. همچنین باید بر اساس اپراتورهای خود الحاقی (Self-Adjoint) نوشته شده و دارای پاسخ تحلیلی باشد. علت اهمیت این موضوع آن است که توابع‌ویژه حاصله از مسأله مقدارویژه با اپراتورهای دیفرانسیلی خودالحاقی متعامدند و برقراری خاصیت تعامد بین مجموعه توابع‌ویژه حاصله از مسأله مقدارویژه در روش GITT یک اصل مهم در استخراج حل می‌باشد (کوتا، ۱۹۹۳). مسأله مقدارویژه انتخابی متناسب با معادله ۲ به‌همراه شرایط مرزی همگن عبارت است از:

$$\frac{\partial^2\Omega_{m,n}(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega_{m,n}(x,y)}{\partial y^2}+(\mu_{m,n}^2-k)\Omega_{m,n}(x,y)=0$$

$$BCs:\begin{cases}\Omega_{m,n}(0,y)=0, & \dfrac{\partial\Omega_{m,n}(L,y)}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial\Omega_{m,n}(x,0)}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial\Omega_{m,n}(x,W)}{\partial y}=0\end{cases}$$

(۴)

که در رابطه ۴، $\Omega(x,y)$ تابع‌ویژه و μ مقدارویژه است. m و n نیز شمارنده‌های تابع‌ویژه هستند. حل مسأله مقدارویژه (رابطه ۴) با استفاده از روش جداسازی متغیرها امکان‌پذیر است. لذا توابع‌ویژه عبارت خواهند بود از:

$$\Omega_{m,n}(x,y)=\sin\left(\frac{2m-1}{2L}\pi x\right)\cos\left(\frac{n-1}{W}\pi y\right),\quad \begin{cases}m=1,2,3,...\\ n=1,2,3,..\end{cases}$$

(۵)

به‌منظور محاسبه تابع‌ویژه نرمال شده بایستی نرم تابع‌ویژه را محاسبه کرد. نرم تابع‌ویژه ($N_{m,n}$) و تابع‌ویژه نرمال شده ($\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)$) نیز به‌ترتیب عبارت‌اند از:

$$N_{m,n}=\int_0^W\int_0^L\Omega_{m,n}^2(x,y)\,dxdy=\begin{cases}\dfrac{LW}{4} & ,n\neq 1\\ \dfrac{LW}{2} & ,n=1\end{cases} \tag{۶}$$

$$\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)=\frac{\Omega_{m,n}(x,y)}{\sqrt{N_{m,n}}}=\frac{1}{\sqrt{N_{m,n}}}\sin\left(\frac{2m-1}{2L}\pi x\right)\cos\left(\frac{n-1}{W}\pi y\right) \tag{۷}$$

در مرحله بعد تبدیل مستقیم و معکوس انتگرالی به‌ترتیب به‌صورت روابط زیر تعریف می‌شود (کوتا، ۱۹۹۳):

$$\bar{c}_{m,n}(t)=\int_0^W\int_0^L c(x,y,t)\,\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)dxdy \tag{۸}$$

$$c(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_{m,n}(t)\,\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y) \tag{۹}$$

با جایگذاری $c(x,y,t)$ از رابطه ۹ در معادله ۲ و ضرب طرفین معادله به‌ازای یک i و j مشخص (که توسط کاربر تعیین می‌شود) در $\int_0^W\int_0^L(.)\,\tilde{\Omega}_{i,j}(x,y)\,dxdy$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\bar{c}_{m,n}(t)\int_0^W\int_0^L\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)\tilde{\Omega}_{i,j}(x,y)\,dxdy=\\&-u\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_{m,n}(t)\int_0^W\int_0^L\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y))\tilde{\Omega}_{i,j}(x,y)dxdy-v\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_{m,n}(t)\int_0^W\int_0^L\frac{\partial}{\partial y}(\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y))\tilde{\Omega}_{i,j}(x,y)dxdy\\&+D_x\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_{m,n}(t)\int_0^W\int_0^L\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y))\tilde{\Omega}_{i,j}(x,y)dxdy+D_y\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_{m,n}(t)\int_0^W\int_0^L\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y))\tilde{\Omega}_{i,j}(x,y)dxdy\\&-k\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_{m,n}(t)\int_0^W\int_0^L(\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y))\tilde{\Omega}_{i,j}(x,y)dxdy+\frac{1}{h}\sum_{l=1}^{ns}\int_0^W\int_0^L W_l(\mathrm{t})\delta(x-x_{s_l})\delta(y-y_{s_l})\tilde{\Omega}_{i,j}(x,y)dxdy\end{aligned}$$

(۱۰)

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، توابع‌ویژه حاصله از مسأله مقدارویژه دارای خاصیت تعامد هستند زیرا مسأله مقدارویژه انتخابی یک مسأله خودالحاقی است. مطابق با خاصیت تعامد توابع‌ویژه می‌توان نوشت:

$$\int_0^W\int_0^L\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)\,\tilde{\Omega}_{i,j}(x,y)dxdy=\begin{cases}0 & if\quad m,n\neq i,j\\ 1 & if\quad m,n=i,j\end{cases} \tag{۱۱}$$

با باز کردن مشتقات تحت انتگرال، استفاده از خاصیت انتقال تابع دلتای دیراک (Sifting property) و خاصیت تعامد توابع‌ویژه، رابطه ۱۰ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\bar{c}_{\mathrm{i,j}}(t)+\frac{u}{\sqrt{N_{m,n}}\sqrt{N_{i,j}}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_{m,n}(t)\left(\frac{2m-1}{2L}\pi\right)\int_0^W\int_0^L\cos(\frac{2m-1}{2L}\pi x)\cos(\frac{n-1}{W}\pi y)\ \sin(\frac{2i-1}{2L}\pi x)\cos(\frac{j-1}{W}\pi y)dxdy\\
&-\frac{v}{\sqrt{N_{m,n}}\sqrt{N_{i,j}}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_{m,n}(t)\left(\frac{n-1}{W}\pi\right)\int_0^W\int_0^L\sin(\frac{2m-1}{2L}\pi x)\sin(\frac{n-1}{W}\pi y)\sin(\frac{2i-1}{2L}\pi x)\cos(\frac{j-1}{W}\pi y)dxdy\\
&+D_x\left(\frac{2i-1}{2L}\pi\right)^2\bar{c}_{\mathrm{i,j}}(t)+D_y\left(\frac{(j-1)\pi}{W}\right)^2\bar{c}_{\mathrm{i,j}}(t)+k\bar{c}_{\mathrm{i,j}}(t)\\
&=\frac{1}{\sqrt{N_{i,j}}}\sum_{l=1}^{n_s}\frac{W_l(t)}{h}\sin(\frac{2i-1}{2L}\pi x_{s_l})\cos(\frac{j-1}{W}\pi y_{s_l})
\end{aligned}\tag{۱۲}$$

به این‌ترتیب، دستگاه ODE نهایی به‌صورت رابطه ۱۳ حاصل خواهد شد:

$$\frac{\partial\bar{c}_{\mathrm{i,j}}(t)}{\partial t}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_{i,j,m,n}\bar{c}_{m,n}(t)=G_{i,j}(t)\ ,\qquad \Gamma_{i,j,m,n}=A_{i,j,m,n}+B_{i,j,m,n}+C_{i,j,\mathrm{i,j}}+D_{i,j,\mathrm{i,j}}+E_{i,j,\mathrm{i,j}}\tag{۱۳}$$

که در رابطه ۱۳، ضرایب دستگاه ODE و ثابت آن ($G_{i,j}(t)$) عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
&A_{i,j,m,n}=\frac{4u}{LW}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_{m,n}(t)\left(\frac{2m-1}{2L}\pi\right)\int_0^W\int_0^L\cos(\frac{2m-1}{2L}\pi x)\cos(\frac{n-1}{W}\pi y)\ \sin(\frac{2i-1}{2L}\pi x)\cos(\frac{j-1}{W}\pi y)dxdy\\
&B_{i,j,m,n}=-\frac{4v}{LW}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_{m,n}(t)\left(\frac{n-1}{W}\pi\right)\int_0^W\int_0^L\sin(\frac{2m-1}{2L}\pi x)\sin(\frac{n-1}{W}\pi y)\sin(\frac{2i-1}{2L}\pi x)\cos(\frac{j-1}{W}\pi y)dxdy\\
&C_{i,j,\mathrm{i,j}}=D_x\left(\frac{2i-1}{2L}\pi\right)^2,\qquad D_{i,j,\mathrm{i,j}}=D_y\left(\frac{(j-1)\pi}{W}\right)^2,\qquad E_{i,j,\mathrm{i,j}}=k\\
&G_{i,j}(t)=\frac{2}{h\sqrt{LW}}\sum_{l=1}^{ns}W_l(\mathrm{t})\sin(\frac{2i-1}{2L}\pi x_{s_l})\cos(\frac{j-1}{W}\pi y_{s_l}),\qquad \begin{cases}i=1,2,...,\infty\\ j=1,2,...,\infty\end{cases},\quad \begin{cases}m=1,2,...,\infty\\ n=1,2,...,\infty\end{cases}
\end{aligned}\tag{۱۴}$$

با توجه به رابطه ۱۴، ضرایب C، D و E با اعمال خاصیت تعامد به‌دست آمده اند. به این‌ترتیب معادله دیفرانسیل جزئی اصلی به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با تعداد بی نهایت (رابطه ۱۳) تبدیل خواهد شد که تنها متغیر مستقل آن t (زمان) بوده و حل آن به مراتب ساده‌تر از حل معادله دیفرانسیل جزئی است. با توجه به رابطه ۱۳، به‌منظور تعیین پاسخ دستگاه ODE نهایی بایستی حد متناهی برای سری دوگانه نامتناهی در دستگاه ODE در نظر گرفته شود به‌طوری‌که از آن حد به بعد اختلاف بین هر دو جمله مقابل سری دوگانه، از مقدار تلرانس (تحمل) در نظر گرفته شده کمتر شود. مقدار تلرانس بسته به میزان حساسیت مسأله، توسط کاربر تعیین شده و قابل‌اعمال است. لذا دستگاه ODE با حدود متناهی عبارت خواهد بود از:

$$\frac{\partial\bar{c}_{\mathrm{i,j}}(t)}{\partial t}+\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\Gamma_{i,j,m,n}\bar{c}_{m,n}(t)=G_{i,j}(t)\ ,\qquad \begin{cases}i=1,2,...,M\\ j=1,2,...,N\end{cases},\quad\begin{cases}m=1,2,...,M\\ n=1,2,...,N\end{cases}\tag{۱۵}$$

با توجه به فرم دستگاه ODE (رابطه ۱۵)، تعداد کل معادلات ODE برابر با $M\times N$ خواهد بود که M و N حدود بالای سیگما می‌باشند. با توجه به‌دستگاه ODE در رابطه ۱۵ واضح است که دستگاه ODE از نوع کوپل (Couple) است. به‌منظور حل دستگاه ODE حاصله (رابطه ۱۵)، بسته به نوع مسأله کاربردی و دقت موردنظر، یک سیستم متناهی و به اندازه کافی بزرگ (M و N

مناسب) از معادلات دیفرانسیل معمولی برای انجام محاسبات بایستی در نظر گرفته شود (کوتا، ۱۹۹۷). سپس با افزایش درجه قطع شدگی (M و N) همگرایی محاسباتی به‌منظور دست‌یابی به نتایج با دقت مطلوب حاصل خواهد شد. برای حل دستگاه ODE از نوع کوپل بایستی روش‌های عددی خاصی مورد استفاده قرار بگیرد. که در میان آنها روش‌های منتسب به خانواده رانج کوتای مرتبه چهارم تا ششم کاربرد فراوانی دارند (کوتا، ۱۹۹۳). به‌منظور حل دستگاه ODE حاصله به شرط اولیه تبدیل‌یافته نیاز است. لذا بایستی شرط اولیه را با توجه به تبدیل مستقیم روش GITT به فرم تبدیل شده درآورد. فرم تبدیل‌یافته شرط اولیه ($\bar{c}_{i,j}(0)$) عبارت است از:

$$\bar{c}_{i,j}(0)=\int_0^W\int_0^L f(x,y)\tilde{\Omega}_{i,j}(x,y)dxdy \tag{۱۶}$$

نهایتاً با داشتن $\bar{c}_{i,j}(0)$ دستگاه ODE حاصله قابل‌حل خواهد بود. در این تحقیق دستگاه ODE نهایی (رابطه ۱۵) با استفاده از روش رانج‌کوتای مرتبه پنجم حل شد. پاسخ دستگاه ODE نهایی در حقیقت بردار مجهولات ($\bar{c}_{m,n}(t)$) خواهد بود نهایتاً با اعمال معکوس تبدیل انتگرالی از رابطه ۹ و در نظر گرفتن M و N به‌عنوان حدود بالای سری دوگانه نامتناهی $c(x,y,t)$ تعیین خواهد شد.

$$c(x,y,t)=\frac{2}{\sqrt{LW}}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\bar{c}_{m,n}(t)\sin\left(\frac{2m-1}{2L}\pi x\right)\cos\left(\frac{n-1}{W}\pi y\right),\quad \begin{cases}m=1,2,\dots,M\\ n=1,2,\dots,N\end{cases} \tag{۱۷}$$

در ادامه به‌منظور ارزیابی حل تحلیلی استخراج شده نتایج حاصله از آن با حل تحلیلی حاصله از روش تابع گرین (GFM) در دامنه دو بعدی مقایسه شده و نتایج در قالب کانتورهای غلظت ارائه خواهد شد.

۳. نتایج و بحث

به‌منظور ارزیابی حل تحلیلی استخراج شده با استفاده از روش GITT، نتایج در قالب دو مثال فرضی مجزا استخراج شده است. در مثال اول شرط اولیه به‌صورت تخلیه ناگهانی جرم ماده خشک در امتداد عمق در یک نقطه با مختصات معین در دامنه و فعالیت یک منبع آلاینده نقطه‌ای با الگوی زمانی تخلیه به‌صورت یک ضابطه مشخص در نظر گرفته شده و نتایج حل به‌روش GITT با حل تحلیلی به‌روش GFM مقایسه شد (ژو و همکاران، ۲۰۰۷؛ مشهدگرمه و همکاران، ۲۰۱۷). در مثال دوم شرط اولیه مشابه با مثال اول و عبارت منبع به‌صورت دو منبع آلاینده نقطه‌ای با الگوهای زمانی دلخواه در دو نقطه متفاوت در دامنه دو بعدی در نظر گرفته شده و مجدداً نتایج حاصله از هر دو روش GITT و GFM با یکدیگر مقایسه شد. لازم به‌ذکر است که در این تحقیق غلظت ورودی از شرط مرزی صفر لحاظ شده و هدف بررسی توزیع آلودگی ناشی از فعالیت همرمان شرط اولیه و منابع آلاینده نقطه‌ای فعال در داخل دامنه دو بعدی می‌باشد. در ادامه شرایط و خصوصیات جریان برای هر دو مثال به تفکیک بیان و نتایج ارائه خواهد شد.

۳-۱. مثال اول: توزیع آلودگی ناشی از شرط اولیه و یک منبع آلاینده با الگوی زمانی منظم

در این مثال به بررسی عملکرد حل تحلیلی به‌دست آمده با روش GITT به‌ازای غلظت ناشی از شرط اولیه در دامنه دو بعدی پرداخته می‌شود. شرط اولیه به‌صورت تخلیه جرم مشخصی از ماده آلاینده در واحد عمق در نقطه‌ای با مختصات معین در دامنه در نظر گرفته شده است. فرم ریاضی تابع مربوط به شرط اولیه عبارت است از:

$$c(x,y,0)=\frac{M}{h}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \tag{۱۸}$$

x_0 و y_0 موقعیت مکانی مربوط به محل تخلیه آلاینده در زمان $t=0$ هستند. مقدار جرم ماده خشک در واحد زمان (M) در این مثال برابر ۷ تن بر ثانیه لحاظ شده است. موقعیت مکانی منبع آلاینده ورودی (S1) در دامنه و نیز شرط اولیه به‌صورت شماتیک در شکل ۱ نشان داده شده

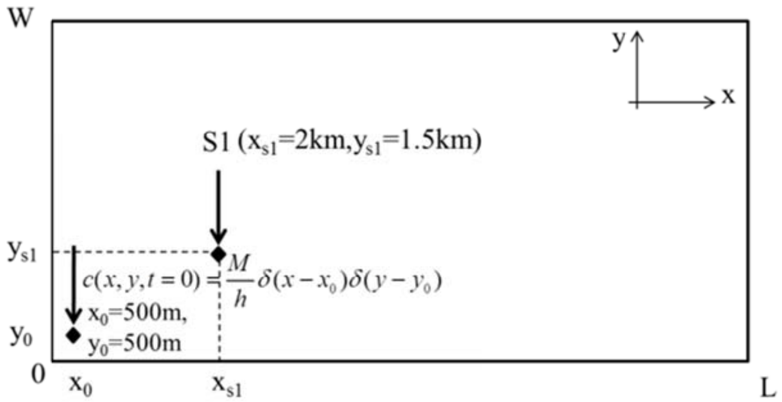
است.

نمودار مربوط به الگوی زمانی تخلیه منبع آلاینده S1 در شکل ۲ ارائه شده و ضابطه ریاضی مربوط به آن مطابق رابطه ۱۶ است:

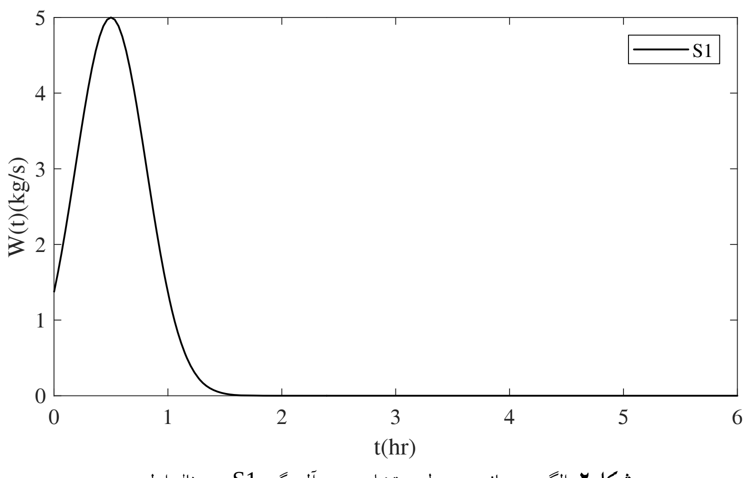
$$W(t) = 5exp\left(-\frac{2(t-1800)^2}{5\times10^6}\right) \tag{۱۹}$$

کانتورهای غلظت حاصله از حل تحلیلی استخراج شده در این تحقیق با حل تحلیلی به‌روش تابع گرین در شکل ۳ با یکدیگر مقایسه شده است. مطابق با شکل ۳، خطوط کانتور رنگی مربوط به حل تحلیلی با روش GITT و خط‌چین‌ها مربوط به حل تحلیلی با روش تابع گرین می‌باشد. خطوط برداری نیز بیانگر میدان سرعت است.

همچنین مقادیر پارامترهای مربوط به جریان و انتقال آلاینده در این مثال در جدول ۱ ارائه شده‌اند.



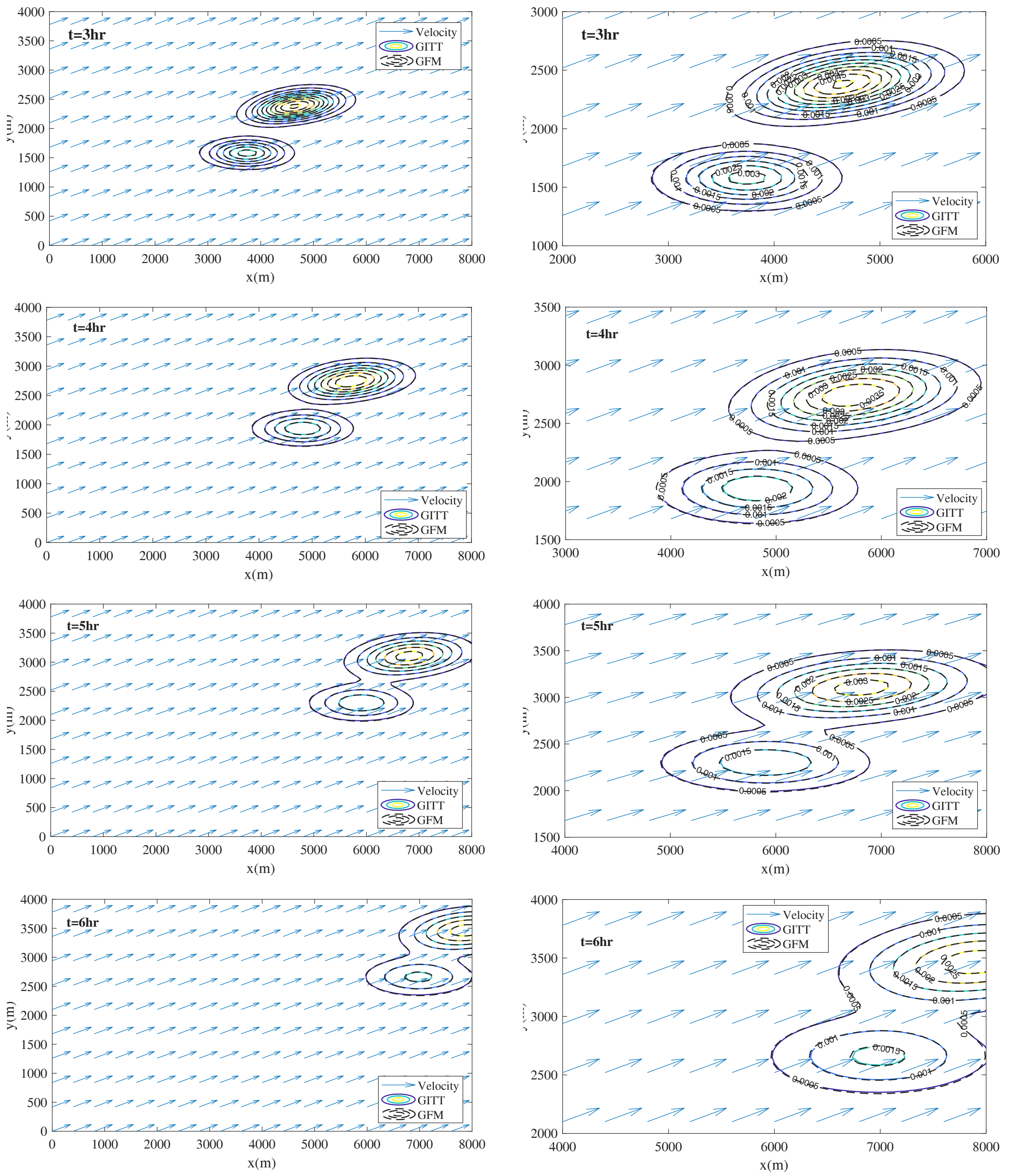
شکل ۱. شکل شماتیک مربوط به موقعیت مکانی غلظت ورودی از شرط اولیه.



شکل ۲. الگوی زمانی مربوط به تخلیه منبع آلودگی S1 در مثال اول.

جدول ۱. مقادیر مربوط به پارامترهای جریان و انتقال آلاینده.

L (km)	W (km)	u (m/s)	v (m/s)	h (m)	D_x (m^2/s)	D_y (m^2/s)	**M** (kg/s)
۸	۴	۰/۳	۰/۱	۵	۱۰	۱	۷۰۰۰



شکل۳. مقایسه حل تحلیلی با روش GITT با حل تحلیلی با روش GFM به‌ازای شرط اولیه ناگهانی و یک منبع آلاینده نقطه‌ای با الگوی زمانی نمایی.

با توجه به شکل ۳، کانتورهای غلظت با استفاده از حل تحلیلی حاصله از روش GITT و حل تحلیلی با روش GFM در زمان‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ ساعت در میدان سرعت به‌دست آمده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در هر یک از زمان‌های مذکور کانتورهای غلظت حاصله از هر دو حل تحلیلی کاملا بر یکدیگر منطبق هستند که این امر نشان‌دهنده عملکرد مطلوب حل تحلیلی حاصله است. علاوه‌بر این شاخص‌های آماری ضریب همبستگی (R^2) و میانگین خطای مطلق (MRE) نیز محاسبه شد. مقدار ضریب R^2 در این تحقیق برابر یک و میانگین خطای مطلق کمتر از ۰/۳ (سه‌دهم درصد) به‌دست آمد که بیانگر انطباق هر دو راه‌حل می‌باشد.

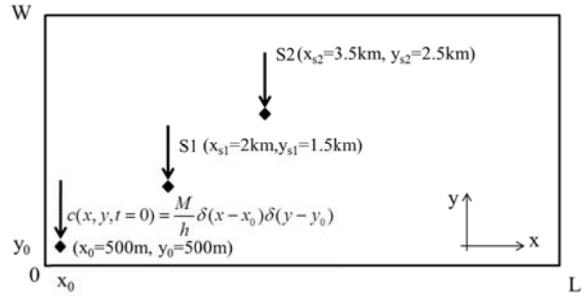
مطابق با شکل ۳، در ساعت ۳ و ۴ گرادیان غلظت در محیط بالاست. از طرفی تأثیرکانتورهای غلظت ناشی از فعالیت شرط اولیه و نیز ابر آلودگی ناشی از منبع آلاینده S1 هنوز به یکدیگر نرسیده اند. با گذشت زمان تحت‌تأثیر سرعت جریان و پدیده پراکندگی، ابر آلودگی بازتر می‌شود. در ساعت ۵، اثر ابرآلودگی ناشی از شرط اولیه و منبع آلاینده نقطه‌ای، به یکدیگر رسیده و با هم ادغام می‌شود و نهایتا با گذشت زمان، ابر آلودگی تحت‌تأثیر عامل پراکندگی در جهات طولی و عرضی در محیط بازتر شده، گرادیان غلظت کاهش‌یافته و ابر آلودگی در جهت سرعت براًیند از دامنه خارج می‌شود.

۳-۲. مثال دوم: توزیع آلودگی ناشی از شرط اولیه و دو منبع آلاینده با الگوهای زمانی نامنظم

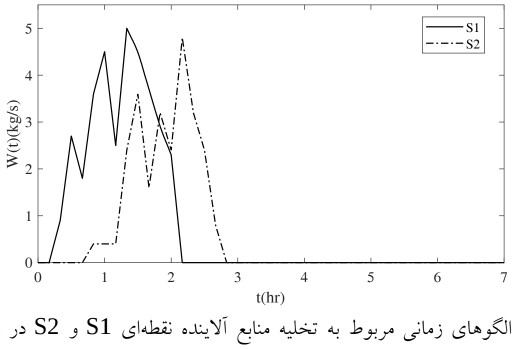
در این مثال به ارزیابی حل تحلیلی پیشنهادی به‌ازای فعالیت منابع آلاینده متعدد یا الگوهای زمانی نامنظم پرداخته می‌شود. در این راستا دو منبع آلاینده S1 و S2 با موقعیت‌های مکانی نشان داده شده در شکل ۴ در نظر گرفته شده است. مقدار جرم ماده آلاینده ورودی از شرط اولیه به همراه مقادیر مربوط به شرایط جریان و پارامترهای انتقال ماده آلاینده مطابق مثال اول است.

نمودار الگوهای زمانی مربوط به تخلیه منابع آلاینده S1 و S2 در شکل ۵ نشان داده شده است. مطابق با شکل ۵ هیچ تابع زمانی مشخصی برای الگوهای زمانی تخلیه منابع آلاینده نقطه‌ای S1 و S2 وجود ندارد.

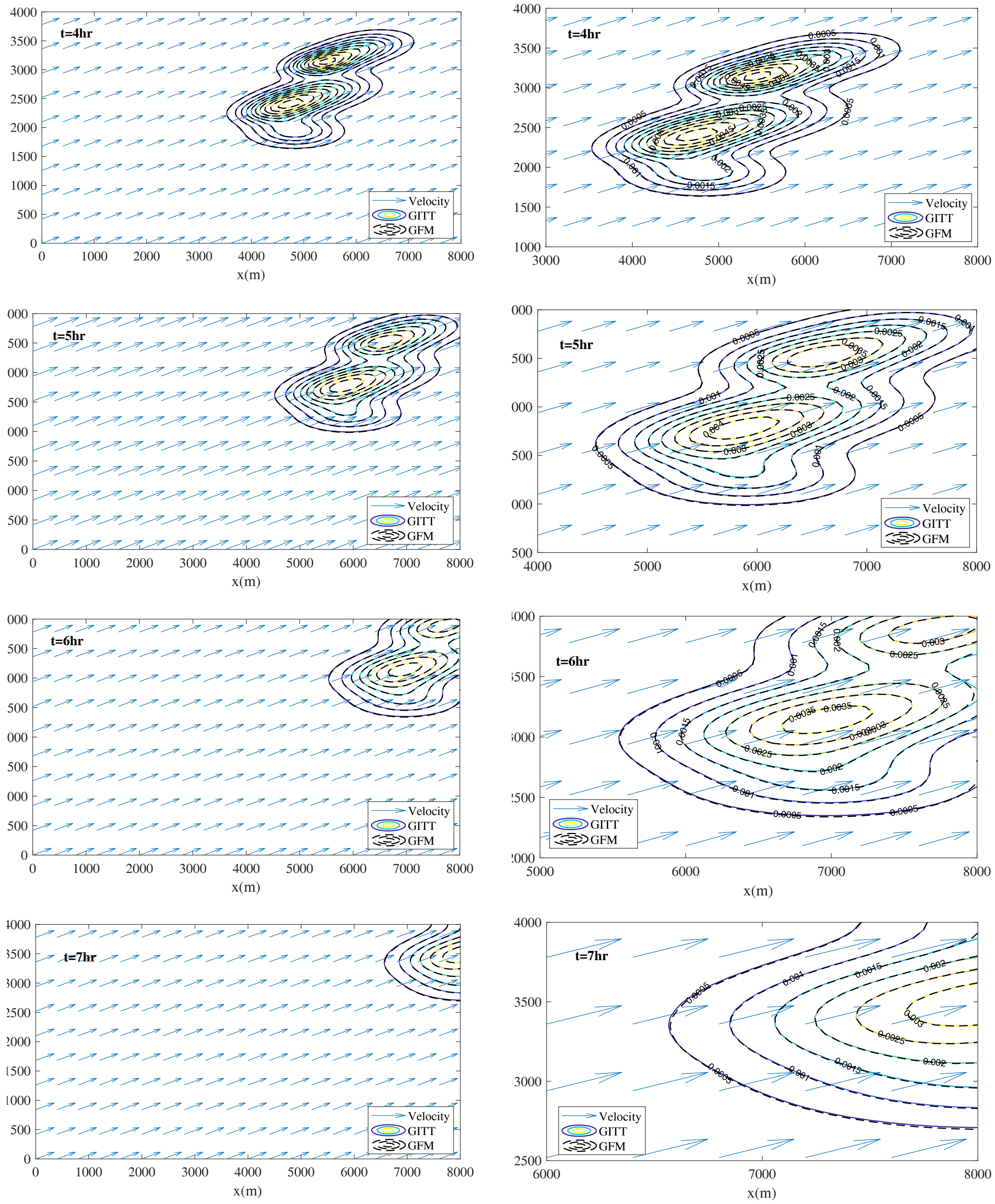
کانتورهای غلظت حاصله مدل‌سازی غلظت ناشی از دو منبع آلاینده با الگوهای زمانی نامنظم و شرط اولیه به‌صورت ناگهانی با استفاده از حل تحلیلی پیشنهادی و حل تحلیلی به روش GFM در میدان سرعت در زمان‌های ۴، ۵، ۶ و ۷ ساعت در شکل ۶ ارائه شده است. مطابق با شکل ۶، تأثیر توأم منابع S1 و S2 با الگوهای بارگذاری مطابق با شکل ۵، به‌همراه شرط اولیه به‌صورت تخلیه ناگهانی ماده خشك در دامنه با استفاده از هر دو راه‌حل به‌دست آمده و کانتورهای غلظت حاصله از هر دو راه‌حل کاملاً بر یکدیگر منطبق‌اند. مقدار ضریب همبستگی (R^2) برابر ۱ و میانگین خطای نسبی (MRE) نیز کمتر از ۰/۵ درصد (پنج‌دهم درصد) به‌دست آمد که بیانگر عملکرد مناسب حل تحلیلی پیشنهادی می‌باشد. مطابق با شکل ۶ در ساعت‌های اولیه (۴ و ۵) ساعت گرادیان غلظت در محیط بالاست اما به‌تدریج با گذشت زمان تحت‌تأثیر پدیده جابه‌جایی و پراکندگی، ابر آلودگی در محیط حرکت کرده و پخش شده و به‌تدریج از گرادیان غلظت در محیط کاسته می‌شود. نهایتاً کانتورهای غلظت حاصله در ساعت‌های ۵ و ۶ به‌تدریج در جهت بردار سرعت برآیند از دامنه خارج می‌شوند. با توجه به کانتورهای غلظت ارائه شده در شکل ۶، تطابق نتایج حاصله از حل استخراج شده در این تحقیق با حل تحلیلی حاصله با روش GFM بیانگر مطلوب بودن عملکرد حل با روش GITT در شرایط پیچیده است و انعطاف‌پذیری و قابلیت بالای کاربرد آن را نشان می‌دهد.



شکل۴. موقعیت مکانی منابع آلاینده نقطه‌ای S1 و S2 و موقعیت مکانی ورود آلاینده از شرط اولیه.



شکل۵. الگوهای زمانی مربوط به تخلیه منابع آلاینده نقطه‌ای S1 و S2 در دامنه در مثال دوم.



شکل ۶. کانتورهای غلظت حاصله از مقایسه حل تحلیلی با GITT با حل تحلیلی GFM در زمان‌های ۴، ۵، ۶ و ۷ ساعت در مثال دوم.

۴. نتیجه‌گیری

منابع آبی کره زمین در معرض آلودگی توسط طیف گسترده‌ای از منابع آلاینده قرار دارند. اطلاع از نحوه توزیع و انتشار آلاینده‌ها در جهت تقویت خاصیت خودپالایندگی رودخانه‌ها و سفره‌های آب زیرزمینی و نیز انجام عملیات پاک‌سازی بسیار مفید و مؤثر است. در این راستا حل‌های تحلیلی معادله انتشار آلودگی نقش بسیار مهمی در صحت‌سنجی حل‌های عددی، تخمین اولیه غلظت در محیط، تعیین پارامترهای فرایند انتقال آلاینده و درک بهتر فیزیک حاکم بر مسائل انتقال و انتشار آلودگی

دارند. تحت شرایطی که دامنه محیط مورد مطالعه عریض باشد، آن‌گاه استفاده از مدل‌های یک بعدی در تخمین غلظت با خطا همراه هستند. در این موارد بایستی از مدل‌های دو بعدی استفاده کرد. در این تحقیق حل تحلیلی صورت دو بعدی و غیرماندگار معادله انتقال آلودگی در دامنه محدود، به‌ازای شرط اولیه کلی و منابع آلاینده نقطه‌ای متعدد با الگوهای زمانی نامنظم با استفاده از روش GITT به‌دست آمد. ارزیابی حل تحلیلی حاصله با مقایسه حل مذکور با حل تحلیلی با روش GFM در دو مثال فرضی جداگانه انجام شد. در مثال اول تنها یک منبع فعال با الگوی زمانی منظم و ضابطه‌مند و در مثال دوم به‌منظور نشان دادن برخی از توانمندی‌های حل پیشنهادی در مدل‌سازی منابع آلاینده متعدد با الگوهای زمانی دلخواه، دو منبع آلاینده نقطه‌ای با الگوهای زمانی نامنظم در دامنه لحاظ شد. در هر دو مثال شرط اولیه به‌صورت تخلیه ماده خشک آلاینده در یک نقطه با مختصات معین در دامنه در نظر گرفته شد. کانتورهای غلظت حاصله از مقایسه حل حاصله با حل GFM در هر دو مثال بر یکدیگر منطبق بوده و عملکرد مطلوب حل تحلیلی استخراج شده را نشان دادند. همچنین به‌منظور ارزیابی کمی، مقادیر شاخص‌های آماری ضریب همبستگی (R^2) و میانگین خطای نسبی (MRE) نیز محاسبه شد. مقدار ضریب همبستگی برابر ۱ و میانگین خطای نسبی نیز کمتر از ۰/۵ درصد (پنج‌دهم درصد) به‌دست آمد که صحت عملکرد حل تحلیلی پیشنهادی را تأیید می‌کند. لازم به‌ذکر است که خطای ناچیز به‌دست آمده به‌علت محدودیت نرم‌افزار محاسباتی در اتخاذ تعداد ارقام اعشاری (تا ۱۶ رقم اعشار) در فرایند محاسبات می‌باشد. ارزیابی انجام شده، انعطاف‌پذیری حل تحلیلی پیشنهادی را در اتخاذ شرط اولیه و منابع آلاینده نقطه‌ای متعدد با الگوهای زمانی نامنظم نشان می‌دهد. حل تحلیلی پیشنهادی در این تحقیق از نظر سرعت همگرایی و هزینه محاسباتی عملکرد مطلوبی نسبت به حل به روش GFM دارد. حل تحلیلی ارائه شده، جامع‌ترین حل تحلیلی در حالت دو بعدی برای معادله انتقال آلودگی در مجاری روباز به‌ازای جریان ماندگار و یکنواخت می‌باشد که در آن تمامی ترم‌های معادله در جهات طولی و عرضی لحاظ شده است و لذا ارائه این حل مهم‌ترین نوآوری این تحقیق است. به علاوه استفاده از روش GITT به‌عنوان یک روش نوین در حل معادلات دیفرانسیل، در روند استخراج حل جنبه دیگری از نوآوری در این تحقیق می‌باشد. همچنین دلخواه بودن تابع مربوط به شرط اولیه و توانایی مدل‌سازی تعداد متعدد منابع آلاینده نقطه‌ای با هر نوع الگوی زمانی تخلیه (منظم یا نامنظم)، بیانگر انعطاف‌پذیری فوق العاده حل مذکور بوده که امکان استفاده از آن در مسائل کاربردی‌تر با صرف هزینه محاسباتی کمتر و دقت بالا را نشان می‌دهد و بیانگر جنبه‌های دیگری از نوآوری‌های حل ارائه شده است. علاوه‌برآن حل تحلیلی پیشنهادی کارایی و قابلیت کاربرد به‌منظور صحت‌سنجی حل‌های عددی در شرایط پیچیده در دامنه‌های دو بعدی را داراست. همچنین حل تحلیلی پیشنهادی می‌تواند در مواردی که ضرایب معادله انتقال آلودگی ثابت است، جایگزین حل‌های عددی شود. زیرا حل‌های تحلیلی، دقیق و سریع بوده و مشکلاتی از قبیل پایداری و نوسان که حل‌های عددی با آنها مواجه هستند را ندارند.

مراجع

Aral, M. M. and Liao, B., 1996, Analytical solutions for two-dimensional transport equation with time-dependent dispersion coefficients., Journal of Hydrologic Engineering 1(1), 20-32.

Basha, H., 1997, Analytical model of two-dimensional dispersion in laterally nonuniform axial velocity distributions., Journal of Hydraulic Engineering 123(10), 853-862.

Cassol, M., Wortmann, S. and Rizza, U., 2009, Analytic modeling of two-dimensional transient atmospheric pollutant dispersion by double GITT and Laplace Transform techniques., Environmental Modelling Software 24(1), 144-151.

Chapra, S. C., 1997, Surface water-quality modeling, McGraw-Hill New York.

Chen, J. S., Chen, J. T., Liu, C. W., Liang, C. P. and Lin, C. W., 2011, Analytical solutions to two-dimensional advection–dispersion equation in cylindrical coordinates in finite domain subject to first-and third-type inlet boundary conditions., Journal of Hydrology 405(3-4), 522-531.

Chen, K., Zhan, H. and Zhou, R., 2016, Subsurface solute transport with one-, two-, and three-dimensional arbitrary shape sources., Journal of contaminant hydrology 190, 44-57.

Costa, C. P., Vilhena, M. T., Moreira, D. M. and Tirabassi, T., 2006, Semi-analytical solution of the steady three-dimensional advection-diffusion equation in the planetary boundary layer., 40(29), 5659-5669.

Cotta, R. M., 1993, Integral transforms in computational heat and fluid flow, CRC Press.

Cotta, R. M., Knupp, D. C. and Naveira Cotta, C. P., 2016, Analytical heat and fluid flow in microchannels and microsystems, Springer.

Cotta, R. M. and Mikhailov, M. D., 1997, Heat conduction: lumped analysis, integral transforms, symbolic computation, Wiley Chichester.

De Almeida, G. L., Pimentel, L. C. and Cotta, R. M., 2008, Integral transform solutions for atmospheric pollutant dispersion., Environmental Modeling Assessment, 13(1), 53-65.

De Barros, F. P., Mills, W. B. and Cotta, R. M., 2006, Integral transform solution of a two-dimensional model for contaminant dispersion in rivers and channels with spatially variable coefficients., Environmental Modelling Software 21(5), 699-709.

De Barros, F. P. and Cotta, R. M. J., 2007, Integral transforms for three-dimensional steady turbulent dispersion in rivers and channels., Applied Mathematical Modelling 31(12), 2719-2732.

Guerrero, J. P., Pimentel, L. C., Skaggs, TH. and Van Genuchten, M. Th., 2009, Analytical solution of the advection–diffusion transport equation using a change-of-variable and integral transform technique., International Journal of Heat Mass Transfer 52(13-14), 3297-3304.

Mashhadgarme, N., Mazaheri, M. and Mohammad Vali Samani, J., 2017, Analytical solutions to one- and two-dimensional Advection-Dispersion-Reaction equation with arbitrary source term time pattern using Green’s function method., Sharif Journal of Civil Engineering, 33-2, 77-91.

Sanskrityayn, A., Singh, V., Bharati, V. K. and Kumar, N., 2018, Analytical solution of two-dimensional advection–dispersion equation with spatio-temporal coefficients for point sources in an infinite medium using Green’s function method. Environmental Fluid Mechanics 18(3), 739-757.

Van Genuchten, M. Th., Leij, F. J., Skaggs, T. H., Toride, N., Bradford, S. A. and Pontedeiro, E. M., 2013, Exact analytical solutions for contaminant transport in rivers 1. The equilibrium advection-dispersion equation., Journal of Hydrology Hydromechanics 61(2), 146-160.

Wortmann, S., Vilhena, M. T., Moreira, D. M. and Buske, D., 2005, A new analytical approach to simulate the pollutant dispersion in the PBL., 39(12), 2171-2178.

Xu, Zh., Travis, J. R. and Breitung, W., 2007, Green's Function Method and Its Application to Verification of Diffusion Models of GASFLOW Code, Forschungszentrum Karlsruhe.

Yadav, R. and Jaiswal, D. K. J. , 2012, Two-dimensional solute transport for periodic flow in isotropic porous media: an analytical solution., Hydrological Processes: An International Journal, 26(22), 3425-3433.

Yadav, R. and Kumar. L. J., 2019, Solute Transport for Pulse Type Input Point Source along Temporally and Spatially Dependent Flow., Pollution, 5(1), 53-70.

Yeh, G. T., 1981, AT123D: Analytical transient one-, two-, and three-dimensional simulation of waste transport in the aquifer system, Oak Ridge National Lab., TN (USA).

Zoppou, C. and Knight, J. J., 1999, Analytical solution of a spatially variable coefficient advection–diffusion equation in up to three dimensions., Applied Mathematical Modelling, 23(9), 667-685.

Journal of the Earth and Space Physics, Vol. 47, No. 1, Spring 2021, P. 6

An Analytical solution to two-dimensional unsteady pollutant transport equation with arbitrary initial condition and source term in the open channels

Mashhadgarme, N.[1], Mazaheri, M.[2*] and Mohammad Vali Samani, J.[3]

1. Ph.D. Student, Department of Water Structures, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
2. Assistant Professor, Department of Water Structures, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
3. Professor, Department of Water Structures, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

(Received: 25 Aug 2019, Accepted: 24 Jan 2021)

Summary

Pollutant dispersion in environment is one of the most important challenges in the world. The governing equation of this phenomenon is the Advection-Dispersion-Reaction (ADRE) equation. It has wide applications in water and atmosphere, heat transfer and engineering sciences. This equation is a parabolic partial differential equation that is based on the first Fick's law and conservation equation. The applications mathematical models of pollution transport in rivers is very vital. Analytical solutions are useful in understanding the contaminant distribution, transport parameter estimation and numerical model verification. One of the powerful methods in solving nonhomogeneous partial differential equations analytically in one or multi-dimensional domains is Generalized Integral Transform Technique (GITT). This method is based on eigenvalue problem and integral transform that converts the main partial differential equation to a system of Ordinary Differential Equation (ODE). In this research, an analytical solution to two-dimensional pollutant transport equation with arbitrary initial condition and source term was obtained for a finite domain in the rivers using GITT. The equation parameters such as velocity, dispersion and reaction factor were considered constant. The boundary condition was assumed homogenous. In this research, the source term is considered as point pollutant sources with arbitrary emission time pattern. To extract the analytical solution, the first step is choosing an appropriate eigenvalue problem. The eigenvalue must be selected based on Self-Adjoint operator and can be solved analytically. In the next, the eigenfunction set was extract by solving the eigenvalue problem with homogenous boundary condition using the separation of variables method. Then the forward integral transform and inverse transform were defined. By implementing the transform and using the orthogonality property, the ordinary differential equation system was obtained. The initial condition was transformed using forward transform and the ODE system was solved numerically and the transformed concentration function was obtained. Finally, the inverse transform was implemented and the main analytical solution was extracted. In order to evaluate the extracted solution, the result of the proposed solution was compared with the Green's Function Method (GFM) solution in the form of two hypothetical examples. In this way, in the first example, the initial condition function as an impulsive one at the specific point in the domain and one point source with the exponential time pattern were considered. In the second example, the initial condition was similar to the first example and two point sources with irregular time pattern were assumed. The final results were represented in the form of the concentration contours at different times in the velocity field. The results show the conformity of the proposed solution and GFM solution and report that the performance of the proposed solution is satisfactory and accurate. The concentration gradient decreases over time and the pollution plume spreads and finally exits from the domain at the resultant velocity direction due to the advection and dispersion processes. The presented solutions have various applications; they can be used instead of numerical models for constant- parameters conditions. The analytical solution is as an exact, fast, simple and flexible tool that is conveniently stable for all conditions; using this method, difficulties associated with numerical methods, such as stability, accuracy, etc., are not involved. Also because of the high flexibility of the present analytical solutions, it is possible to implement arbitrary initial condition and multiple point sources with more complexity in emission time patterns. So it can be used as a benchmark solution for the numerical solution validation in two-dimensional mode.

Keywords: Pollutant transport equation, initial condition, point sources, arbitrary time pattern, Generalized Integral Transform Technique, finite domain.

* Corresponding author: m.mazaheri@modares.ac.ir