مجلهٔ فیزیک زمین و فضا، جلد ۳۲، شماره ۳، ۱۳۸۵، صفحهٔ ۵۹- ۶۷

تعیین دقیق مدار ماهواره‌های زمین‌ایستا (ژئواستیشنری) بر اساس نظریهٔ پتانسیل

علیرضا آزموده اردلان* و طلوع سیلاوی*

*گروه مهندسی نقشه‌برداری، قطب مهندسی نقشه‌برداری و مقابله با سوانح طبیعی، پردیس فنی دانشگاه تهران صندوق پستی ۴۵۶۳-۱۱۳۶۵

(دریافت: ۸۳/۹/۱ ، پذیرش نهایی: ۸۵/۶/۲۸)

چکیده

مدار زمین‌ایستا از سال‌ها قبل، برای برقراری ارتباطات مخابراتی جهانی مورد استفاده قرار گرفته است. مطالعه گستردهٔ ما در این خصوص مشخص ساخت که تاکنون همهٔ محاسبات تعیین مدار ماهواره‌های زمین‌ایستا بر اساس میدان پتانسیل نقطه‌ای $W = GM / r$ صورت گرفته است. از آنجا که این میدان، یک میدان بسیار تقریبی برای میدان پتانسیل واقعی زمین است، در این تحقیق بر آن شدیم که بررسی جامعی در خصوص تعیین مدار ماهواره‌های زمین‌ایستا با بهره‌گیری از نظریهٔ پتانسیل و مدل‌های پتانسیل کروی و بیضوی کامل‌تر (نزدیک‌تر به میدان پتانسیل واقعی زمین) صورت دهیم. مدل‌های پتانسیلی به‌کار برده شده عبارت‌اند از: (الف) میدان پتانسیل متوسط کروی (ب) جملهٔ اول بسط پتانسیل گرانی زمین به هارمونیک‌های بیضوی و (ج) میدان پتانسیل سومیگلیانا- پیزتی. بر اساس نتایج حاصل، شعاع مدار ماهوارهٔ زمین‌ایستا برای میدان‌های (الف) تا (ج) دارای اختلافات به ترتیب $0.5\,\mathrm{Km}$ ، $2.15\,\mathrm{Km}$ و $2.7\,\mathrm{Km}$ با مدار محاسبه شده از راه میدان نقطه‌ای $W = GM / r$ است. از آنجایی که این اختلاف موجب حرکت جزئی ماهواره در مدار خود می‌شود، ماهواره‌های زمین‌ایستای فعلی نیازمند راکت‌هایی هستند که برای تصحیح موقعیت مداری آنها مورد استفاده قرار گیرند و معمولاً عمر مفید این ماهواره‌ها بر اساس مدت زمان کفایت سوخت این راکت‌ها تعیین می‌شود. جزئیات نحوه محاسبه شعاع ماهواره‌های زمین‌ایستا بر اساس میدان‌های یاد شده در این مقاله ارائه شده است. بر اساس نتایج حاصل مدار زمین‌ایستا با شعاع $42,161,465,71\,\mathrm{m}$ ، بر مبنای میدان‌های پتانسیل سومیگلیانا- پیزتی، برای به‌کارگیری در مخابرات ماهواره‌ای پیشنهاد می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مدار زمین‌ایستا، حرکت مداری، مکانیک سماوی، میدان‌های پتانسیل

۱ مقدمه

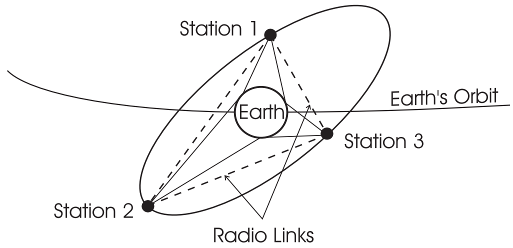
پیشرفت بشر در علوم فضایی تا حد بسیاری مدیون مخابرات بین‌المللی ماهواره‌ای و تفکری است که اولین بار کلارک، (۱۹۴۵) به شرح زیر بیان کرد:

"اگر آنتن‌های رلهٔ مخابراتی روی ماهواره‌ای در فاصلهٔ تقریبی ۴۲۰۰۰ کیلومتر قرار گیرند، چون تناوب دوران چنین ماهواره‌ای ۲۴ ساعت است موقعیت آن ماهواره نسبت به زمین ثابت می‌ماند و بدین ترتیب می‌تواند به‌صورت سکویی برای پوشش رادیویی در محدودهٔ وسیعی از سطح زمین به‌کار رود. به علاوه اگر تعداد ۳ ماهواره از این نوع با زاویهٔ ۱۲۰ درجه در صفحهٔ مدار یاد شده قرار گیرند و بین این ماهواره‌ها نیز ارتباط رادیویی بر قرار شود، کل سطح زمین تحت پوشش رادیویی قرار خواهد گرفت".

امروزه مدار پیشنهادی کلارک، مدار زمین‌ایستا (geostationary) نامیده می‌شود و به ماهواره‌های قرار گرفته در چنین مداری ماهوارهٔ زمین‌ایستا می‌گویند. شکل ۱ نشان دهندهٔ نحوهٔ پوشش جهانی مخابراتی با سه ماهواره با زاویهٔ ۱۲۰ درجه در مدار زمین‌ایستا مطابق نظریهٔ کلارک است. کلارک در مقالهٔ سال ۱۹۴۵ خود علاوه بر خصوصیات مداری این نوع ماهواره‌ها به شرح قدرت و بسامدهای مورد نیاز برای این نوع ارتباطات ماهواره‌ای پرداخته است و حتی مشخص می‌سازد که چگونه می‌توان از انرژی خورشید برای تولید انرژی الکتریکی این گونه ماهواره‌ها استفاده کرد. در پایگاه اینترنتی /http://celestrak.com/columns/v04n07 می‌توان به اطلاعات بیشتر در این خصوص دست یافت.

لازم بود تصور کلارک سال‌ها در انتظار بماند تا نخستین ماهواره زمین‌ایستا به نام سنکوم ۳ (Syncom3) در

۱۹ اوت ۱۹۶۴ در مدار قرار گیرد و در اکتبر همان سال برای مخابره بازی‌های المپیک کیوتو به امریکا به‌کار رود تا بدین‌سان، عصر مخابرات ماهواره‌ای آغاز شود.



شکل ۱. پوشش جهانی مخابراتی با استفاده از سه ماهوارهٔ زمین‌ایستا با زاویه ۱۲۰ درجه در صفحه مداری و ارتباط رادیویی بین ماهواره‌ها بر اساس نظریه کلارک.

حرکت یک ماهواره به‌دور زمین، صرفاً تحت تأثیر شتاب جاذبه زمین صورت می‌گیرد. از نظر مکانیک سماوی ایجاد حرکت ماهواره‌ای، مستلزم خنثی شدن نیروی جاذبهٔ زمین با شتاب گریز از مرکز حاصل از حرکت گردشی ماهواره به‌دور زمین است. برای اینکه یک ماهواره نسبت به زمین در موقعیت ثابتی در فضا قرار گیرد، لازم است علاوه بر خنثی شدن نیروی جاذبه با نیروی گریز از مرکز، سرعت گردش ماهواره به‌دور زمین برابر سرعت چرخش زمین شود. به چنین ماهواره‌ای که می‌توان اثبات کرد حتماً در صفحهٔ استوا قرار خواهد داشت، ماهوارهٔ زمین‌ایستا و به مدار آن، مدار زمین‌ایستا اطلاق می‌شود.

مؤلفین مقالهٔ حاضر در بررسی گسترده خود متوجه شدند که تاکنون محاسبه مدار زمین‌ایستا فقط براساس قانون سوم نیوتن که بر مبنای میدان گرانی نقطه‌ای $W = GM/r$ استوار بوده، صورت گرفته است، و بدین خاطر بر آن شدند که مدار زمین‌ایستا را براساس میدان‌های کامل‌تری نظیر (الف) میدان پتانسیل متوسط کروی (ب) میدان حاصل از جملهٔ اول بسط پتانسیل گرانی زمین به هارمونیک‌های بیضوی و (ج) میدان پتانسیل سومیگلیانا–پیزتی (اردلان و گرافارند، ۲۰۰۱)، که همگی میدان‌های کامل‌تری از میدان نقطه‌ای $W = GM/r$ هستند، محاسبه کنند و تأثیر آن را بر شعاع مدار ماهواره‌های زمین‌ایستا به‌دست آورند. به علاوه، میدان‌های یاد شده (میدان‌های الف تا ج) تنها میدان‌های رفرانسی‌اند که دارای سطوح هم‌پتانسیل از نوع کره و یا بیضوی هستند. جدول ۱ در برگیرنده تعریف همهٔ میدان‌های پتانسیل با سطوح هم‌پتانسیل از نوع کروی و جدول ۲ حاوی تعریف میدان‌های پتانسیل دارای سطوح هم‌پتانسیل بیضوی است.

جدول ۱. میدان‌های گرانی رفرانس کروی.

نام میدان	رابطهٔ میدان
میدان نقطه‌ای	$W(r) = \frac{GM}{r}$
میدان متوسط کروی	$W(\phi, r) = \frac{GM}{r} + \frac{1}{2} r^2 \omega^2 \cos^2 \phi + \frac{1}{6} r^2 \omega^2 (\frac{R^5}{r^5})(3\sin^2 \phi - 1)$

جدول ۲. میدان‌های گرانی رفرانس بیضوی.

نام میدان	رابطهٔ میدان
جملهٔ اول بسط میدان پتانسیل گرانی زمین به هارمونیک‌های بیضوی	$W(u) = \frac{GM}{\varepsilon} \operatorname{arc\,cot}(\frac{u}{\varepsilon})$
سومیگلیانا- پیزتی	$W(\phi, u) = \frac{GM}{\varepsilon} \operatorname{arc\,cot}(\frac{u}{\varepsilon}) + \frac{1}{6}\omega^2 a^2 \frac{(3\frac{u^2}{\varepsilon^2}+1)\operatorname{arc\,cot}(\frac{u}{\varepsilon}) - 3\frac{u}{\varepsilon}}{(3\frac{b^2}{\varepsilon^2}+1)\operatorname{arc\,cot}(\frac{b}{\varepsilon}) - 3\frac{b}{\varepsilon}} (3\sin^2 \phi - 1) + \frac{1}{2}\omega^2 (u^2 + \varepsilon^2)\cos^2 \phi$

در فصل بعد به محاسبه مدار زمین‌ایستا براساس میدان‌های جداول ۱ و ۲ می‌پردازیم و نتیجه حاصل را با مدار زمین‌ایستا حاصل از میدان نقطه‌ای مقایسه خواهیم کرد.

با توجه به اهمیت مدار زمین‌ایستا در زمینهٔ مخابراتی کتب و مقالات عدیده‌ای در این خصوص موجود است،

ما در اینجا برای نمونه به پایگاه‌های اینترنتی زیر اشاره می‌کنیم:

http://members.aol.com/geostat2
http://en.wikipedia.org/wiki/Geostationary_transfer_orbit
http://www.celestrak.com/columns/v04n09

۲ تعیین مدار زمین‌ایستا بر حسب میدان‌های کروی

همان‌گونه که در مقدمه ذکر شد، محاسبه مدار ماهوارهٔ زمین‌ایستا مستلزم خنثی شدن شتاب جاذبهٔ زمین با شتاب گریز از مرکز ناشی حرکت ماهواره و به علاوه تساوی سرعت گردش ماهواره با سرعت چرخش زمین است. با در اختیار داشتن پتانسیل، شتاب از راه اعمال اپراتور گرادیانت به تابع پتانسیل قابل محاسبه است. گرادیانت تابعی مانند $W(\lambda,\phi,r)$ در دستگاه مختصات کروی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} g &= \operatorname{grad} W(\lambda,\phi,r) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}}\frac{\partial W}{\partial\lambda}e_\lambda + \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\frac{\partial w}{\partial\phi}e_\phi \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\frac{\partial W}{\partial r}e_r \end{aligned} \qquad (۱)$$

در رابطه (۱) $\{e_\lambda, e_\phi, e_r\}$ بردارهای پایه کروی و $\{g_{\lambda\lambda}, g_{\phi\phi}, g_{rr}\}$ مؤلفه‌های تانسور متریک هستند. جدول ۳ ارائه دهندهٔ تانسور متریک در دستگاه مختصات کروی است. توابع پتانسیل مورد بحث در این بخش قبلاً در جدول ۱ معرفی شده‌اند. پتانسیل گریز از مرکز بر حسب دستگاه مختصات کروی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(r,\phi) = \frac{1}{2}r^2\omega^2\cos^2\phi \qquad (۲)$$

جدول ۳. تانسور متریک در دستگاه مختصات کروی.

تانسور متریک	رابطهٔ ریاضی
g_{rr}	1
$g_{\phi\phi}$	r^2
$g_{\lambda\lambda}$	$r^2\cos^2\phi$

محاسبه مشتقات جزیی پتانسیل جاذبه و پتانسیل گریز از مرکز میدان‌های کروی جدول ۱ در جدول ۴ خلاصه شده‌اند. با استفاده از این دو جدول و روابطی که برای میدان پتانسیل گرانی و پتانسیل گریز از مرکز ارائه شد، می‌توان به محاسبهٔ شعاع مدار زمین‌ایستا اقدام کرد. به عبارت دیگر با در اختیار داشتن شتاب جاذبه و شتاب گریز از مرکز (گرادیان پتانسیل) می‌توان از شرط تساوی این دو استفاده کرد. معادلات لازم برای یافتن شعاع مدار زمین‌ایستا را با مساوی قرار دادن سرعت دوران ماهواره با سرعت چرخش زمین به‌دست آورد. معادلهٔ (۳) حاصل تساوی‌های یادشده است:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}}\frac{\partial W}{\partial\lambda}e_\lambda + \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\frac{\partial W}{\partial\phi}e_\phi + \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}}\frac{\partial W}{\partial r}e_r \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}}\frac{\partial V}{\partial\lambda}e_\lambda + \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\frac{\partial V}{\partial\phi}e_\phi + \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\frac{\partial V}{\partial r}e_r \end{aligned} \qquad (۳)$$

از این معادله برای هر دو میدان کروی مورد بحث به منظور یافتن مشخصات مدار زمین‌ایستا، یعنی شعاع و مختص ϕ استفاده خواهیم کرد. ابتدا ساده‌ترین میدان کروی یعنی $W = GM/r$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به معادلهٔ (۳) از اطلاعات موجود در جدول‌های ۳ و ۴ به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$-\frac{GM}{r^2}e_r = \frac{1}{r}(r^2\omega^2\cos\phi\sin\phi)e_\phi + (r\omega^2\cos^2\phi)e_r \qquad (۴)$$

لازم به توضیح است که به دلیل وابسته نبودن میدان‌های پتانسیل گرانی و گریز از مرکز مورد بحث در این مقاله به مختص λ، در همهٔ حالات مورد بررسی، پارامتر λ از روند محاسبات حذف می‌شود. معادلهٔ (۴) یک معادلهٔ برداری است و آن را برای به‌دست آوردن دو مجهول r و ϕ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} r\omega^2\cos\phi\sin\phi = 0 \\ -GM = r^3\omega^2\cos^2\phi \end{cases} \qquad (۵)$$

جدول ٤. مشتقات جزیی توابع پتانسیل کروی.

نام تابع	$\frac{\partial}{\partial\phi}$	$\frac{\partial}{\partial\phi}$
پتانسیل گریز از مرکز	$r\omega^2\cos^2\phi$	$r^2\omega^2\cos\phi\sin\phi$
$W(r)=\frac{GM}{r}$	$\frac{-GM}{r^2}$	0
میدان بیرهامر	$-\frac{GM}{r^2}$ $-\frac{1}{2}(\frac{\omega^2 R^5}{r^4})(3\sin^2\phi-1)$	$-r^2\omega^2(\frac{R^5}{r^5})(\sin\phi\cos\phi)$ $+r^2\omega^2(\frac{R^5}{r^5})(\sin\phi\cos\phi)$

برای حل اولین معادلهٔ (۵) با توجه به اینکه می‌دانیم r و ω نمی‌توانند صفر باشند، فقط صفر بودن $\sin\phi$ و $\cos\phi$ را درحکم جواب‌های محتمل در نظر می‌گیریم. پاسخ‌های زیر حاصل این فرض‌اند:

$$\begin{cases}\phi=0\\ \phi=90^\circ\end{cases} \tag{۶}$$

حال این دو جواب را در معادلهٔ دوم (۵) قرار می‌دهیم و در مورد جواب به صورت زیر بحث خواهیم کرد:

حالت الف: $\phi=90^\circ$

در این حالت داریم:

$$GM=0 \tag{۷}$$

که جواب غیر ممکن است، چون GM ثابت جاذبهٔ زمین و مقداری قابل مشاهده و مخالف صفر است.

حالت ب: $\phi=0^\circ$

در این حالت برای r به جواب زیر می‌رسیم:

$$r=\left|\sqrt[3]{-GM/\omega^2}\right| \tag{۸}$$

مقادیر عددی پارامترهای موجود در این معادلات در جدول ۵ آورده شده‌اند. با به‌کارگیری این مقادیر، شعاع مدار زمین‌ایستا ارائه شده در جدول ۶ به‌دست آمده است. اعمال اپراتور قدر مطلق برای اجتناب از مقدار منفی برای شعاع در معادلهٔ (۸) ضروری است.

جدول ۵. مقادیر عددی پارامترهای مورد استفاده در محاسبه مدار زمین‌ایستا بر حسب مدل‌های کروی اردلان و گرافارند (۲۰۰۶).

پارامتر	تعریف	مقدار عددی
GM	ثابت جاذبه	$398600.4418\times10^9\,m^3/\delta^2$
ω	سرعت دورانی	$70292115\times10^{-5}\,Rad/\delta$
R	شعاع کره رفرانس	$6370991.248\,m$

جدول ٦. نتایج حاصل برای مدار زمین‌ایستا با استفادهٔ از مدل‌های کروی.

ϕ	شعاع مداری	میدان
0	42164172.93m	$W(r)=GM/r$
0	42163619.42m	میدان بیرهامر

حال شرط (۳) را برای میدان کروی دوم جدول ۳ (میدان متوسط کروی) در نظر می‌گیریم. با قرار دادن مشتقات جزیی ارائه شده این میدان از جدول ۴ و تانسورهای متریک کروی ارائه شده از جدول ۳ در معادلهٔ (۳) به رابطهٔ زیر خواهیم رسید:

$$\left(\omega^2\left(\frac{R^5}{r^3}\right)\sin\phi\cos\phi\right)e_\phi-\left(\frac{GM}{r^4}+\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2R^5}{r^4}\right)(3\sin^2\phi-1)\right)e_r=\frac{1}{r}(r^2\omega^2\cos\phi\sin\phi)e_\phi+(r\omega^2\cos^2\phi)e_r \quad (۹)$$

معادلهٔ (۹) معادله‌ای برداری است و از مساوی قرار دادن ضرایب مربوط به بردارهای پایهٔ e_ϕ و e_r در دو طرف تساوی، دو معادلهٔ زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\omega^2R^5(3\sin^2\phi-1)+GMr^2+\omega^2R^5\cos^2\phi=0\\ \frac{\omega^2}{r^3}R^5\sin\phi\cos\phi+\omega^2r^2\sin\phi\cos\phi=0\end{cases} \quad (۱۰)$$

در اینجا نیز با قرار دادن پاسخ‌های معادلهٔ دوم (۱۰)، یعنی $\phi=90^\circ$ و $\phi=0^\circ$، در معادلهٔ اول (۱۰) می‌توان به‌صورت زیر در مورد جواب‌ها بحث کرد:

حالت الف: $\phi=90^\circ$

در این حالت از راه معادلهٔ اول (۱۰) به مقداری منفی برای GM می‌رسیم که بر خلاف واقعیت است.

حالت ب: $\phi=0^\circ$

در این حالت از راه معادلهٔ اول (۱۰) برای r به یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۵ به‌صورت زیر خواهیم رسید:

$$\omega^2r^5+GMr^2+\frac{1}{2}\omega^2R^5=0 \quad (۱۱)$$

از آنجایی که برای حل چندجمله‌ای‌های با درجهٔ بالاتر از ۴، راه حل عمومی تاکنون یافت نشده است، برای حل این چندجمله‌ای پس از قرار دادن مقادیر پارامترهای بنیادی $\{GM,\omega,R\}$ از جدول ۵، اقدام به یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای به صورت عددی کردیم. برای این منظور از الگوریتم عددی موجود در نرم‌افزار MATLAB® استفاده شد. جدول ۶ برگیرندهٔ نتیجهٔ حاصل برای شعاع ماهوارهٔ زمین‌ایستا در مورد میدان کروی دوم مورد مطالعه در این مقاله (یعنی میدان متوسط کروی) در مجاورت میدان کروی اول است.

۳ تعیین مدار زمین‌ایستا بر حسب میدان‌های بیضوی

مطابق بخش قبل از تعریف اپراتور گرادیان آغاز می‌کنیم. گرادیان تابعی مانند $W(\lambda,\phi,u)$ برحسب مؤلفه‌های مختصاتی $\{\lambda,\phi,u\}$، که مؤلفه‌های مختصاتی ژاکوبی نامیده شده و با دستگاه مختصات کارتزین دارای ارتباط

$$\begin{aligned}x&=\sqrt{u^2+\varepsilon^2}\cos\phi\cos\lambda\\ y&=\sqrt{u^2+\varepsilon^2}\cos\phi\cos\lambda\\ z&=u\sin\phi\end{aligned} \quad (۱۲)$$

$$\begin{aligned}g&=\operatorname{grad}W(\lambda,\phi,u)\\ &=\frac{1}{g_{\lambda\lambda}}\frac{\partial W}{\partial\lambda}e_\lambda+\frac{1}{g_{\phi\phi}}\frac{\partial W}{\partial\phi}e_\phi\\ &\quad+\frac{1}{g_{uu}}\frac{\partial W}{\partial u}e_u\end{aligned} \quad (۱۳)$$

است به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

در رابطه (۱۲) $\varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}$ خروج از مرکز خطی و در رابطه (۱۳) $\{e_\lambda,e_\phi,e_u\}$ بردارهای پایه بیضوی و $\{g_{\lambda\lambda},g_{\phi\phi},g_{uu}\}$ مؤلفه‌های تانسور متریک هستند. جدول ۷ معرف تانسور متریک در دستگاه مختصات بیضوی ژاکوبی است. توابع پتانسیل مورد بحث در این بخش قبلاً در جدول ۲ معرفی شده‌اند. پتانسیل گریز از مرکز برحسب دستگاه مختصات بیضوی ژاکوبی به صورت زیر قابل نمایش است:

$$V(\phi,u)=\frac{1}{2}(u^2+\varepsilon^2)\omega^2\cos^2\phi \quad (۱۴)$$

محاسبهٔ مشتقات جزئی پتانسیل جاذبه و گریز از مرکز میدان‌های بیضوی جدول ۲ در جدول ۸ خلاصه شده‌اند.

جدول ۷. تانسور متریک دستگاه مختصات بیضوی.

تانسور متریک	رابطۀ ریاضی
g_{uu}	$\frac{u^2+\varepsilon^2\sin^2\phi}{u^2+\varepsilon^2}$
$g_{\phi\phi}$	$u^2+\varepsilon^2\sin\phi$
$g_{\lambda\lambda}$	$u^2+\varepsilon^2$

جدول ۸ مشتقات جزئی توابع پتانسیل بیضوی نسبت به دو پارامتر u و ϕ.

نام پتانسیل	$\frac{\partial}{\partial u}$	$\frac{\partial}{\partial \phi}$
پتانسیل گریز از مرکز	$u\omega^2\cos^2\phi$	$-(u^2+\varepsilon^2)\omega$ $\cos\phi\sin\phi$
جملۀ اول بسط میدان پتانسیل گرانی زمین به هارمونیک‌های بیضوی	$-\frac{GM}{\varepsilon^2+u^2}$	0
پتانسیل سومیگلیانا- پیزتی	$-\frac{GM}{\varepsilon^2+u^2}+\frac{(3\sin^2\phi-1)}{m}\left[-\frac{(3u^2+\varepsilon^2)}{\varepsilon(\varepsilon^2+u^2)}+(\frac{6u}{\varepsilon^2})\operatorname{arc}\cot(\frac{u}{\varepsilon})-\frac{3}{\varepsilon}\right]$	$\frac{(3\frac{u^2}{\varepsilon^2}+1)\operatorname{arc}\cot(\frac{u}{\varepsilon})-3\frac{u}{\varepsilon}}{(3\frac{b^2}{\varepsilon^2}+1)\operatorname{arc}\cot(\frac{b}{\varepsilon})-3\frac{b}{\varepsilon}}\times\omega^2a^2(\sin\phi\cos\phi)$
توضیح: در سطر آخر m دارای تعریف زیر است: $m=\frac{1}{6}\omega^2a^2((3\frac{b^2}{\varepsilon^2}+1)\operatorname{arc}\cot(\frac{b}{\varepsilon})-3(\frac{b}{\varepsilon}))^{-1}$		

در اینجا نیز معادلۀ مورد استفاده برای رسیدن به پارامترهای مدار زمین‌ایستا به‌صورت زیر بوده است و مشتقات جزئی و تانسورهای متریک مورد استفاده در آن از جداول ۷ و ۸ برداشت شده‌اند.

$$\frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}}\frac{\partial W}{\partial\lambda}e_\lambda+\frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\frac{\partial W}{\partial\phi}e_\phi+\frac{1}{\sqrt{g_{uu}}}\frac{\partial W}{\partial u}e_u$$
$$\frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}}\frac{\partial V}{\partial\lambda}e_\lambda+\frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\frac{\partial V}{\partial\phi}e_\phi+\frac{1}{\sqrt{g_{uu}}}\frac{\partial V}{\partial u}e_u \tag{۱۵}$$

معادلۀ (۱۵) برای جملۀ اول بسط میدان پتانسیل جاذبۀ زمین به هارمونیک‌های بیضوی به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2+\varepsilon^2\sin^2\phi}{u^2+\varepsilon^2}}}\left(\frac{-GM}{\varepsilon^2+u^2}\right)\quad e_u$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2\sin\phi}}(u^2+\varepsilon^2)\omega^2\cos\phi\sin\phi\quad e_\phi$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2+\varepsilon^2\sin^2\phi}{u^2+\varepsilon^2}}}u\omega^2\cos^2\phi\quad e_u \tag{۱۶}$$

معادلۀ (۱۶) معادله‌ای برداری است که از طریق آن می‌توان با مساوی قرار دادن ضرایب مربوط به بردارهای پایهٔ e_ϕ و e_u به دستگاه معادلات زیر رسید:

$$\begin{cases} u\omega^2\cos^2\phi - \dfrac{GM}{\varepsilon^2+u^2} = 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2\sin\phi}}(u^2+\varepsilon^2)\omega^2\cos\phi\sin\phi = 0 \end{cases} \quad (۱۷)$$

از حل معادلهٔ دوم (۱۷) برای ϕ به مقادیر $\phi = 0^\circ$ و $\phi = 90^\circ$ می‌رسیم. حال با قرار دادن این جواب‌ها در معادلهٔ اول (۱۷) شعاع مدار ماهوارهٔ زمین‌ایستا را برحسب پارامتر u به صورت زیر جستجو می‌کنیم:

حالت الف: $\phi = 90^\circ$

با قرار دادن $\phi = 90^\circ$ در معادله اول (۱۷) به نتیجهٔ $GM = 0$ می‌رسیم که مورد قبول نیست.

حالت ب: $\phi = 0^\circ$

با قرار دادن $\phi = 0^\circ$ در معادلهٔ اول (۱۷) به چندجمله‌ای زیر بر حسب u خواهیم رسید:

$$\omega^2u^2 + \varepsilon^2\omega^2u + GM = 0 \quad (۱۸)$$

رابطهٔ (۱۸) یک چندجمله‌ای درجهٔ ۳ است، بنابراین می‌توان آن را به صورت تحلیلی حل کرد. حل یک چندجمله‌ای درجهٔ ۳ به ۳ جواب منجر می‌شود. از حل معادلهٔ (۱۸)، به دو جواب موهومی و یک جواب حقیقی می‌رسیم که جواب حقیقی آن به‌صورت زیر است:

$$u = \left| \frac{1}{6}\frac{(\omega\sqrt{-108\ GM + 12(12\varepsilon^6\omega^4 + 81(GM)^2)^{1/3}}}{\omega} - 2\frac{\varepsilon^2\omega}{\sqrt{-108\ GM + 12(12\varepsilon^6\omega^4 + 81(GM)^2)^{1/3}}} \right| \quad (۱۹)$$

با جایگزینی مقادیر عددی پارامترهای بنیادی $\{GM, \omega\}$ از جدول ۵ به مقدار عددی ارائه شده در جدول ۱۰ برای شعاع ماهوارهٔ زمین‌ایستا برحسب این میدان بیضوی خواهیم رسید.

در مورد میدان سومیگلیانا-پیزتی معادلهٔ (۱۵) به‌صورت (۲۰) در خواهد آمد. معادلهٔ (۲۰) معادله‌ای برداری است و منجر به تشکیل دستگاه معادلات (۲۱) برای یافتن دو مجهول ϕ و u می‌شود. از حل معادلهٔ دوم (۲۱) به جواب‌های $\phi = 0^\circ$ و $\phi = 90^\circ$ می‌رسیم. حال با قرار دادن این جواب‌ها در معادلهٔ اول (۲۱) می‌توان جواب دستگاه معادلات (۲۱) برای مولفهٔ مختصاتی u را به‌صورت زیر جستجو کرد.

حالت الف: $\phi = 90^\circ$

در این حالت از معادلهٔ اول (۲۱) به یک چندجمله‌ای درجهٔ ۵ بر حسب u می‌رسیم. این چندجمله‌ای درجهٔ ۵ را می‌توان فقط از روش‌های عددی حل کرد. برای این منظور از الگوریتم موجود در نرم‌افزار MATLAB® استفاده شد. از آنجا که هیچ‌یک از جواب‌های این چندجمله‌ای درجهٔ ۵ حقیقی نیست این حالت جزء حالات مورد قبول تلقی نمی‌شود.

حالت ب: $\phi = 0^\circ$

در این حالت با قرار دادن $\phi = 0^\circ$ در معادلهٔ اول دستگاه (۲۱) به یک چندجمله‌ای درجهٔ ۵ می‌رسیم. برای حل این چندجمله‌ای نیز به کمک نرم‌افزار MATLAB® اقدام به حل عددی شد که فقط جواب حقیقی آن در جدول ۱۰ درج شده است.

حال با در اختیار داشتن شتاب جاذبه و شتاب گریز از مرکز می‌توان از شرط تساوی این دو استفاده کرد و معادلات لازم برای یافتن شعاع مدار زمین‌ایستا را برحسب مدل‌های بیضوی به‌دست آورد. مقادیر عددی پارامترهای موجود در این معادلات در جدول ۹ آورده شده است. مجهولات در اینجا u و ϕ هستند که برای آنها می‌توان دو معادله تشکیل داده و از حل دستگاه حاصل این مجهولات را به‌دست آورد. خلاصه نتایج حاصل در جدول ۱۰ درج شده است.

$$\frac{1}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2\sin\phi}}\frac{\left(3\frac{u^2}{\varepsilon^2}+1\right)\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)-3\frac{u}{\varepsilon}}{\left(3\frac{b^2}{\varepsilon^2}+1\right)\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)-3\frac{b}{\varepsilon}-3\frac{b}{\varepsilon}}\omega^2a^2(\sin\phi\cos\phi)\;\;e_\phi$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2+\varepsilon^2\sin^2\phi}{u^2+\varepsilon^2}}}\left[-\frac{GM}{u^2+\varepsilon^2}+\frac{3\sin^2-1}{m}\left(-\frac{3u^2+\varepsilon^2}{\varepsilon(u^2+\varepsilon^2)}+\frac{6u}{\varepsilon^2}\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)-\frac{3}{\varepsilon}\right)\right]\;\;e_u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2\sin\phi}}(-(u^2+\varepsilon^2)\omega^2\cos\phi\sin\phi)\;\;e_\phi$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2+\varepsilon^2\sin\phi}{u^2+\varepsilon^2}}}(u\omega^2\cos^2\phi)\;\;e_u \tag{۲۰}$$

$$\begin{cases}-\frac{GM}{u^2+\varepsilon^2}-\frac{1}{3}\omega^2a^2\left(-3u^3\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)+\left(3u^2+\left(-3u\quad\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)+2\varepsilon\right)\varepsilon\right)\varepsilon\right)\\ \times\frac{3\sin^2\phi-1}{u^2+\varepsilon^2}\frac{1}{\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)\varepsilon^2+\left(-3\varepsilon+3\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)b\right)b}-\omega^2u\cos^2\phi=0\\ \omega^2a^a\frac{3\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)u^2+\left(-3u+\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\varepsilon\right)\varepsilon}{\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)\varepsilon^2+\left(-3\varepsilon+3\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)b\right)b}\sin\phi\cot\phi\\ +\omega^2\left(a^2+\varepsilon^2\right)\cos\phi\sin\phi=0\end{cases} \tag{۲۱}$$

جدول ۹. مقادیر عددی پارامترهای مورد استفاده در محاسبه مدار زمین‌ایستا بر حسب مدل‌های بیضوی اردلان و گرافارند (۲۰۰۶).

پارامتر	تعریف	مقدار عددی
a	نصف قطر اطول بیضوی رفرانس	6378136.602m
b	نصف قطر اقصر بیضوی رفرانس	6356751.860m
GM	ثابت جهانی جاذبه	$398600.4418\times10^9 m^3/S^2$
ω	سرعت دورانی زمین	7029211510^{-5} Rad / S
ε	خروج از مرکزیت خطی	521854.674m

جدول ۱۰. نتایج حاصل برای مدار زمین‌ایستا با استفادهٔ از مدل‌های بیضوی.

ϕ	شعاع	میدان
0	42162019.95m	جملهٔ اول بسط میدان پتانسیل گرانی زمین به هارمونیک‌های بیضوی
0	42161465.71m	میدان سومیگلیانا- پیزتی

۴ بحث و نتیجه‌گیری

برای مقایسهٔ ساده‌تر، نتایج حاصل از محاسبهٔ شعاع مدار زمین‌ایستا با استفاده از مدل‌های کروی و بیضوی در جدول ۱۱ نمایش داده شده‌اند که خود تلفیقی از جدول‌های ۶ و ۱۰ مربوط به بخش‌های ۲ و ۳ است.

جدول ۱۱. خلاصه نتایج حاصل برای مدار زمین‌ایستا با استفاده از مدل‌های کروی و بیضوی.

ϕ	شعاع مداری	میدان
0	42164172.93m	W(r) = GM / r
0	42163619.42m	میدان بیرهامر
0	42162019.65m	جملهٔ اول بسط میدان پتانسیل گرانی زمین به هارمونیک‌های بیضوی
0	42161465.71m	میدان سومیگلیانا- پیزتی

با توجه به جدول ۱۱ می‌توان به نتایج زیر رسید:

۱- مدار ماهوارهٔ زمین‌ایستا فقط می‌تواند در صفحهٔ استوا قرار داشته باشد (ϕ برای هر مدلی که انتخاب شود، صفر به‌دست خواهد آمد).

۲- شعاع مدار محاسبه شده برای میدان متوسط کروی، جملهٔ اول بسط میدان پتانسیل گرانی زمین به هارمونیک‌های بیضوی، و میدان سومیگلیانا-پیزتی با میدان نقطه‌ای دارای اختلافات به‌ترتیب 0.5 Km، 2.15 Km و 0.7 Km است.

از آنجا که میدان سومیگلیانا-پیزتی نزدیک‌ترین میدان به میدان زمین است، و به‌علاوه از سوی IAG (International Association of Geodesy) به‌مثابهٔ میدان رفرانس زمین پیشنهاد شده است، ما نیز این میدان را برای محاسبه شعاع ماهواره‌های زمین‌ایستا پیشنهاد می‌کنیم.

منابع

Clarke, A. C., 1945, Extra-terrestrial relays: Can rocket stations give worldwide radio coverage? Wireless World, October 1945, p. 306.

Ardalan, A. A., and Grafarend, E. W., 2001, Somigliana-Pizzetti gravity-The international gravity formula-accurate to the sub-nanoGal level. J. Geodesy, **75**, 424-437.

Ardalan, A. A., and Grafarend, W. E., 2006., Level sets, application of implicit function theorem, radius of Bjerhammer sphere, Semi-major axis and semi-minor axis of Somigliana-Pizzeti, Bruns formulas (Spherical and Ellipsoidal Examples). Under Rev. J. Geodesy.